Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement

Marianne Moulin

N° d'ordre : 121 - 2014 Année 2014

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Délivrée par

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

ÉCOLE DOCTORALE 485 EPIC
Éducation, Psychologie, Information et Communication

DIPLÔME DE DOCTORAT
(arrêté du 7 août 2006)

Spécalité : Didactique des Mathématiques

Soutenue publiquement le 10 juillet 2014

Marianne MOULIN

Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques :

Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement

Sous la direction de M. Éric TRIQUET et Mme Virginie DELOUSTAL-JORRAND

JURY :

Mme Virginie DELOUSTAL-JORRAND	Co-Directrice
Mme Viviane DURAND-GUERRIER	Rapporteur
Mme Magali HERSANT	Examinatrice
M. Christian MERCAT	Examinateur
M. Alain MERCIER	Rapporteur
M. Éric TRIQUET	Directeur

S2HEP : Sciences et Société ; Historicité, Éducation et Pratiques
EA 4148, Université Claude Bernard Lyon 1 , ENS de Lyon
Bâtiment "La Pagode" 38 boulevard Niels Bohr
Campus de la Doua, 69622 Villeurbanne.

Résumé de la thèse en français :
Dans le cadre de notre thèse en didactique des mathématiques, nous explorons la pertinence du récit en tant que mode de pensée et support potentiel à la construction de raisonnement. Nous soutenons l'hypothèse que lors d'une activité de résolution de problèmes de mathématiques, la construction d'un récit visant à répondre à une situation problématique peut être un élément déclencheur, producteur et structurant du raisonnement. En nous appuyant sur différents travaux qui ont souligné les fonctions heuristiques et structurantes du récit, nous avons caractérisé au plan théorique et mis à l'épreuve expérimentalement un milieu didactique permettant d'envisager une co-construction entre récit et raisonnement.
La situation de résolution de problèmes que nous proposons, construite autour d'un jeu, amène les élèves à produire des récits descriptifs (basés sur des parties effectivement réalisées) et des récits d'anticipation (basés sur des parties imaginaires). Nos résultats mettent en évidence que le récit enrichit le milieu didactique au sens proposé par Hersant (2010), en particulier au travers de l'acte de construction par les élèves. Celui-ci soutient l'établissement du raisonnement et sa justification mathématique. C'est en produisant différents types de récits que les élèves, tout en prenant en charge les contraintes mathématiques de la situation, s'affranchissent du monde sensible et s'engagent dans une véritable activité de preuve mathématique (production d'exemples, de contre-exemples, de conjectures, d'argumentations, etc.).

Résumé de la thèse en anglais :
Our thesis in mathematics education explores the relevance of story building as a pattern of thought and potential support for the construction of reasoning. We assume that establishing a narrative in order to answer a problematic situation is both a trigger and processing aid. Our main hypothesis is that the narrative act offers structured guidelines for the process of reasoning during problem solving activity. Several studies have indeed highlighted the heuristics and structuring functions of narrative. Relying on these studies we first characterized theoretically, and then tested experimentally a didactical environment. We shaped the characteristics of this environment with the objective of ensuring a joint development between narrative and reasoning.
The situation of problem solving we offer is built around a game. To address problematic situations, students produced descriptive (based on games already played) and anticipated (based on imaginary games) narratives. In both cases, the construction of a narrative is a powerful asset. Our results demonstrate that the story enriches, with the meaning of Hersant (2010), the educational environment. The act of narration supports the student's mathematical reasoning and justification. While producing different types of stories, students embrace the mathematical constraints of the situations and step back from the sensible world. No more restrained by material thinking, the students are more inclined to mathematical approach. Therefore, they develop or enhance their mathematical proving skills (example and counter-example arguments, mathematical conjectures and demonstrations, etc.).

Mots-clefs : Didactique des Mathématiques ; Résolution de problèmes ; Récit ; Raisonnement ; Interdisciplinarité ; Langage ; Milieu didactique ; Jeu.

Remerciements

Un des membres de mon jury m'a dit qu'une thèse n'était pas une fin mais un commencement ... Alors, avant fermer la porte de ma vie d'étudiante et de "débuter" ma carrière de chercheuse, je tenais à remercier les personnes qui m'ont permis d'en arriver là. Et parce qu'il faut bien choisir un ordre, je prendrai celui de mes rencontres professionnelles et plus personnelles.

En premier lieu, je souhaite remercier les enseignants du master Histoire Philosophie et Didactique des Sciences de l'Université Claude Bernard Lyon 1. Ce sont eux qui, en m'initiant à la didactique, m'ont fait découvrir et aimer une discipline extrêmement riche. Je pense en particulier à mes directrices de mémoire, Véronique Battie en licence et en première année de master, Catherine Bruguière et Virginie Deloustal-Jorrand en seconde année et Viviane Durand-Guerrier qui, même si elle ne m'a jamais officiellement encadrée a toujours pris le temps de me guider vers les bonnes personnes. Elles m'ont, chacune à leur manière, ouvert les portes de la recherche en m'apprenant à observer et analyser avec toujours plus d'ouverture, de recul, de rigueur et, bien sûr, de passion.

Les autres portes ouvertes, et même grandes ouvertes, devant moi ont été celles du S2HEP. À quelques jours de mon départ, j'ai une pensée reconnaissante envers tous les membres du laboratoire qui, à un moment ou à un autre m'ont ouvert la porte, parfois virtuelle, de leur bureau. Que ce soit pour des renseignements administratifs ou des conseils pratiques, pour des partages bibliographiques et méthodologiques, pour des véritables questions existentielles ou simplement pour une pause, je n'ai jamais trouvé une seule porte close. Et pourtant, le froid glacial qui règne en hiver à la pagode aurait pu en faire hésiter plus d'un à ouvrier son bureau, pour une simple question de survie. J'y ait fait de très belles rencontres qui se poursuivront, je l'espère, à l'extérieur du laboratoire. Un grand merci aux doctorants et doctorantes, pour les nombreux échanges et un merci tout particulier à mes partenaires de galère avec qui j'ai partagé mes doutes, mes découvertes et qui m'ont accompagnée dans et hors de la thèse.

À l'extérieur de la pagode, il y a deux groupes qui ont eu une grande importance pour moi. Le Léa Paul Émile Victor auprès duquel j'ai pu m'évader tout en travaillant. Un grand merci à tous ses membres pour les réunions du mercredi, pour les séminaires à Saillans, pour les nombreuses découvertes scientifiques, artistiques, ludiques et cullinaires qui ont toutes contribuées à mon travail de thèse. Le second groupe que je tiens à remercier est celui des jeunes chercheurs de l'ARDM et de YERME. Que ce soit en français ou en anglais, nos nombreux échanges et nos retrouvailles en colloque aux quatre coins de la France et de l'Europe, ont enrichi mes années de thèse et enrichiront, je l'espère, mes années de chercheuse.

Bien évidemment, je n'aurai jamais pu réaliser ce travail de thèse sans mes deux directeurs, Éric Triquet et Virginie Deloustal-Jorrand. Nous nous sommes engagés ensemble dans un projet ambitieux, sans véritables indices sur notre lieu d'arrivée et pourtant, en regardant en arrière aujourd'hui, il me semble que nous n'aurions pas pu prendre un autre chemin. Durant ces quatre années nous avons ouvert, et parfois refermé, de nombreuses portes. À chaque tentative, leurs regards experts, leur écoute et leur confiance nous ont permis d'avancer dans la bonne direction. Même si, à de très rares occasions, j'ai dû passer par une fenêtre pour ouvrir certaines portes de l'intérieur, ils ont toujours cru en moi. Ils ont su trouver les mots juste pour me guider au départ, puis petit à petit pour me pousser à suivre mon instinct et donner le meilleur de moi-même. À leurs côtés j'ai appris à me positionner avec toujours plus de précision, à penser par moi même et surtout à oser l'exprimer, à développer mon regard didactique et à toujours être prête pour l'inattendu. Je les remercie tous deux pour leur soutien sans failles, leur écoute, leur bienveillance, nos longues discussions, leur humour et, bien sûr, leurs talents de danseurs.

Je tiens à remercier très chaleureusement tous les membres de mon jury. Je remercie Magali Hersant et Christian Mercat qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse et qui ont, par leurs questions et la discussion engagée, ouvert de nouveaux angles de lecture et de nombreuses pistes à explorer. Je remercie Viviane Durand-Guerrier et Alain Mercier de l'intérêt qu'ils ont porté à ma thèse en acceptant d'être rapporteurs. Leur lecture très attentive de mon travail et leurs précieux commentaires ont été extrêmement enrichissants pour moi. Ils m'offrent ainsi la possiblité de porter un regard neuf sur mon travail, de nombreuses heures de réflexion à venir et des perspectives ambitieuses dans lesquelles j'ai hâte de m'engager.

De manière plus prosaïque, il est important pour moi de remercier les six enseignants qui m'ont ouvert les portes des leurs classes. Je suis très reconnaissante de l'attention et du temps qu'ils m'ont offert. Je remercie bien évidement tous les élèves qui ont participé avec leur naturel et leur volonté de bien faire. Leur investissement, comme celui de leurs enseignants, a participé à rendre mon corpus extrêmement riche et intéressant à analyser.

Au-delà du professionnel, cette thèse n'aurait jamais pu exister sans ma famille et les personnes qui m'entourent. Il m'est plus difficile de trouver les mots pour les gens qui me sont proches, c'est pourquoi je terminerai cette page simplement. En disant merci à mes parents pour leur soutien, leur relecture et tout ce qu'ils ont pu faire, merci à ma famille, ceux qui sont venus à ma soutenance et ceux qui auraient bien voulu. Merci à mes amies de fac pour leurs encouragements et leur attention exceptionnelle en amphi. Merci à Chris, Alex et Luss d'avoir fait bien plus qu'un détour par l'université et de m'avoir soutenue tout du long. Merci à la famille de Sophie qui n'a pas hésité une seconde à débarquer pour m'encourager. Et surtout, merci à Sophie qui me connait si bien qu'elle sait, sans aucun doute, tout ce que j'aurai voulu lui dire.

Table des matières

Introduction **13**

I Résolution de problèmes, mathématiques et récit : Analyse des supports d'enseignement et étude des travaux existants **19**

1 Modèle de traitement des problèmes à l'école primaire : définition d'un curriculum praxique **23**

1.1 L'activité de résolution de problèmes dans les programmes scolaires de 2008 24

1.2 Apprentissage *par* et *de* la résolution de problèmes : Documents d'accompagenement des programmes pour l'école primaire 30

1.3 Conclusion sur l'analyse des instructions officielles 38

2 Méthodes d'apprentissage et des aides à la résolution de problèmes : analyse des supports d'enseignement **43**

2.1 Premier type d'apprentissage : Compréhension et traitement de l'énoncé d'un problème 44

2.2 Deuxième type d'apprentissage : Analyse de séquences de résolution . . . 48

2.3 Troisième type d'apprentissage : Classification des problèmes 54

2.4 Conclusion et piste envisagée pour un travail sur l'activité de résolution de problèmes 57

3 Caractériser la mise en récit des problèmes scolaires **59**

3.1 Travaux existants 60

3.2 Analyse structurelle des énoncés scolaires 64

3.3 Caractérisation du "*récit mathématique*", "*récit de fiction mathématique*" 68

4 Principes de notre approche de la résolution de problèmes par le récit **75**

Conclusion 83

II Modélisations théoriques des interactions entre construction de récit et résolution de problèmes en mathématiques : Fonctions du récit et caractéristiques d'un milieu didactique intégrant le récit 85

5 Caractérisation de la résolution de problèmes de mathématiques 89
5.1 Composantes de l'objet problème 90
5.2 Processus de résolution de problèmes dans l'activité du chercheur 92
5.3 Processus de résolution de problème (classique) dans l'activité de l'élève . 103

6 Définition et caractéristiques du récit 109
6.1 Approche interne et composition de l'objet récit : Situation, évènements, intrigue 112
6.2 Approche externe : Contrat de lecture, fiction, mondes possibles 115
6.3 Le récit en tant que mode de pensée 118

7 Les fonctions du récit selon les théoriciens du récit & illustrations en sciences expérimentales 119
7.1 Fonction structurante via la situation 120
7.2 Fonction problématisante via l'intrigue 122
7.3 Fonction explicative via la résolution 123
7.4 Conclusion 125

8 Modélisations théoriques des interactions entre construction de récit et résolution de problèmes 127
8.1 Modèle d'interaction des processus 129
8.2 Modèles d'interaction du récit avec le milieu didactique 134

Conclusion : Inscription du récit dans le milieu didactique 139

III Etude expérimentale des apports du récit en résolution de problèmes : Élaboration d'un milieu didactique permettant la prise en charge de raisonnements au travers du récit 141

9 Proposition, à partir d'un jeu, d'une situation permettant la résolution de problèmes via la construction de récits 145
9.1 Présentation du jeu à la base de la construction de la structure de notre situation 147
9.2 Analyse mathématique et logique des règles du jeu : détermination d'une axiomatique locale 149
9.3 Analyse mathématique et logique de contraintes externes : élaboration de variables didactiques 156

9.4 Caractérisation de l'activité de construction de récits inscrits dans l'axiomatique locale 163
9.5 Conclusion : Contextualisation de notre modèle d'interactions entre récit et problèmes 168

10 Présentation et analyse *a priori* de notre expérimentation 171
10.1 Caractérisation de la notion de tâche 172
10.2 Objectif, choix et milieu didactique 174
10.3 Articulation des tâches 194
10.4 Conclusion : Mise en relation des tâches de résolution de problèmes et des fonctions du récit 196

11 Analyse des productions d'élèves 199
11.1 Analyse Tâche 1 : Conjecturer sur des caractéristiques de parties non jouées et justitifer les conjectures 201
11.2 Analyse Tache 2 : inventer et raconter des parties imaginaires respectant une série de contraintes 206
11.3 Analyse des interactions entre les deux tâches 212
11.4 Analyse des phases orales : débat sur le nombre de manches dans une partie 215
11.5 Complément à notre expérimentation 224

Conclusion : Résultats et limites de notre expérimentation 233

Conclusion : Modélisation effective des interactions entre construction de récit et résolution de problèmes 235

Bibliographie 249

Annexes 253

A Extraits de programmes et de manuels scolaires 255

B Extrait Ouvrage Polya *Comment poser et résoudre un problème* 260

C Processus d'expression et de transformation des connaissances - Scardamalia et Beriter (1998) 263

D Axiomatique locale - Démonstrations mathématiques 267

E Documents enseignants 271

F Documents élèves experimentation 279

G Productions d'élèves 287

H Tableaux d'analyse 291

I Extraits de transcription **297**

J Analyse des phases orales - Liste des épisodes **325**

Introduction

Le travail que nous proposons dans notre thèse s'inscrit dans une approche pluridisciplinaire portée par une équipe du laboratoire S2HEP [1] de l'Université Claude Bernard Lyon 1. Depuis 2007, les chercheurs et enseignants de ce groupe de recherche s'intéressent aux fonctions du récit dans les apprentissages scientifiques via différents supports de médiation (albums de littérature de jeunesse, séries télévisées, récits produits par des élèves). Ce thème est en essort en sciences expérimentales depuis quelques années. Sa nouveauté en didactique des mathématiques impose une appropriation des modèles établis en sciences et la construction de modèles spécifiques aux mathématiques. C'est cet objectif qui porte notre travail de recherche.

Nous nous sommes engagés à la fois dans ce thème de recherche et dans cette équipe lors de notre deuxième année de master en réalisant notre mémoire de recherche. Ce dernier, intitulé *Des textes de fiction pour lire les énoncés de problèmes de mathématiques en classe de CM2 : Explicitation des contrats en jeu* [2] nous a permis de développer un travail plus spécifique en didactique des mathématiques. En nous appuyant notamment sur le cadre théorique développé par Orange-Ravachol et Triquet (2007) et Bruguière et Héraud (2007), nous avons mis en évidence les apports de la lecture de récits de fiction dans un travail visant à améliorer la lecture et la compréhension des énoncés de problèmes de mathématiques. Les supports choisis pour notre expérimentation, deux ouvrages de littérature de jeunesse, nous ont permis d'engager avec les élèves une réflexion sur la modélisation du monde auquel se réfère un énoncé de problème et sur le monde mathématique (Moulin, Deloustal-Jorrand, & Triquet, 2013). Le travail expérimental engagé en lien avec ce mémoire fait l'objet d'une publication dans la revue Grand *N* (Moulin, 2010). Les perspectives ouvertes par cette première étude, nous ont incité à poursuivre la réflexion engagée au niveau d'une thèse en didactique des mathématiques. Notre première approche, dans laquelle les élèves étaient engagés dans une activité de réception de récit, ne nous a pas permis d'entrer dans une véritable phase de résolution de problèmes. Pour atteindre cet objectif, nous avons fait le choix de nous orienter dans une approche en production de récit. Ainsi, en considérant le récit comme un mode de pensée, nous sommes en mesure de proposer aux élèves, un outil pour construire leur raisonnement dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes.

1. Sciences et Société : Historicité, Éducation et Pratiques
2. Mémoire soutenu en 2010 et réalisé sous la direction de Catherine Bruguière et Virginie Deloustal-Jorrand, toutes deux maîtres de conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1 et membres du S2HEP.

La référence actuelle pour une pratique relative au récit en résolution de problème est la *narration de recherches.* Les travaux développés dans ce cadre s'intéressent au récit en tant qu'outil permettant aux élèves de verbaliser, *a posteriori*, leur démarche dans une situation de résolution de problèmes. L'activité de narration joue alors un rôle qui est avant tout descriptif. Elle n'influe pas *a priori* sur la résolution immédiate du problème. C'est lors de résolutions ultérieures de problèmes que l'élève pourra mobiliser les connaissances et compétences liées en particulier à la démarche mathématique. Notre travail de thèse s'incrit dans un cadre différent. Par comparaison directe, nous pourrions dire que notre approche vise à étudier l'apport immédiat de la construction d'un récit dans la résolution d'un problème. Nous proposons, dans notre thèse, de déterminer les conditions permettant une co-construction entre le récit et la résolution d'un problème.

Notre postulat de départ est que, **dans le cadre d'une activité de résolution de problème de mathématiques, la construction d'un récit visant à répondre à la situation problématique peut être un élément déclencheur, producteur et structurant du raisonnement mathématique.** Autrement dit, nous considérons le récit comme un support potentiel de l'activité de problématisation et de construction du raisonnement. Nous souhaitons montrer que le récit participe, sous certaines conditions, à la construction d'un raisonnement pour résoudre un problème de mathématiques et d'une justification de la solution trouvée.

Nous mettons cette hypothèse à l'épreuve d'un point de vue théorique et pratique respectivement dans les parties II et III de notre thèse. En amont de ce travail, nous avons procédé à ce que nous avons appelé une *analyse de l'existant* constituant la partie I de notre manuscrit.

Dans cette première partie, nous nous sommes intéressés à la résolution de problèmes au travers des instructions officielles et des manuels scolaires pour l'école primaire. Cette étude des ressources à destination des enseignants et des élèves nous permet de souligner l'ambiguité du rapport à la résolution de problèmes de l'insitution et donc des enseignants. Elle est présentée à la fois comme une aide au développement des concepts mathématiques et comme une activité complexe devant faire l'objet d'un apprentissage. Ce double statut provoque une opposition forte entre deux types de problèmes : les problèmes "standards" qui visent à contextualiser l'utilisation des objets mathématiques et les problèmes de recherche qui visent au développement des capacités de réflexion et de raisonnement. La simplification des énoncés de problèmes standards, mise en défaut dans de nombreux travaux de didactique, est selon nous une conséquence de cette distinction entre les deux activités. La volonté d'aider l'élève se traduit généralement par une perte de l'intention mathématique ou par une décomposition de l'activité en étapes qui ne lui permettent pas d'appréhender la réalité de cette activité. Ce travail nous amène à mettre en évidence la difficulté à envisager et proposer dans ces supports des apprentissages et des aides à la résolution de problèmes qui respectent la complexité de cette activité et qui permettent de mobiliser toutes les compétences en jeu.

Nous avons également réalisé un travail bibliographique pour situer notre approche par rapport aux recherches posant la question des relations entre récit et mathématiques.

Outre les narrations de recherche que nous avons évoqué dans cette introduction, nous avons repéré deux types de travaux. Le premier consiste en des études des différents discours (écrits et oraux) produits dans la classe de mathématiques. Nous pouvons penser par exemple aux travaux de Lahanier-Reuter (2007). Dans ces recherches c'est le rôle des différents discours dans le fonctionnement de la classe qui est mis à l'étude. La notion de récit est alors étendue à plusieurs types de productions qui n'en possèdent pas toujours les caractéristiques et qui sont mises en avant particulièrement pour leur rôle dans la communication et la transmission d'informations. Le second type regroupe des travaux questionnant la forme narrative des énoncés de problèmes. Ces recherches, comme celle de Camenisch et Petit (2006) s'intéressent uniquement aux aspects narratifs du texte, c'est à dire aux traces de l'énonciation. Ils se concentrent sur des *faits de langue*, intéressants sur les aspects de compréhension, mais qui ne permettent pas comme nous le souhaitons de traiter l'activité de résolution de problèmes dans son intégralité.

Ce travail d'analyse nous permet d'introduire les principes de notre approche. Pour souligner les spécificités de notre travail et faciliter la lecture de notre document de thèse, nous présentons en conclusion de cette première partie les éléments fondamentaux de notre démarche et nous les illustrons par des exemples extraits de notre travail expérimental. Le caractère exploratoire de notre travail qui ouvre un domaine encore non exploré en didactique des mathématiques nous permet de justifier ce choix. Nous souhaitons fournir quelques clefs de lecture en proposant à notre lecteur un aperçu de nos objectifs réalisés.

Ce travail préparatoire nous permet d'envisager le traitement de notre hypothèse au travers de deux objectifs qui constituent le fil directeur des parties II et III de notre thèse :

- Proposer une modélisation des objets *problème de mathématiques* et *récit* qui nous permette de déterminer des lieux de recontre entre les activités cognitives qui leur sont traditionnellement associées. La construction de ces modélisations a pour but de mettre en avant des analogies structurelles mais aussi des similitudes dans les processus de traitement relatifs à chacun des deux objets.
- Déterminer les conditions et les enjeux d'une rencontre entre construction de récit et résolution de problèmes. Il s'agit dans un premier temps de caractériser les contraintes permettant de faire interagir les deux activités, puis dans un second temps, de mesurer l'impact de cette interaction.

La partie II prend en charge la majeure partie des aspects théoriques que nous avons développés. Nous y construisons, en parallèle, les modélisations de nos objets d'étude initiaux, le problème et le récit. Ces modèles, tels que nous les avons construits, nous permettent de mettre en évidence les points communs que nous avions anticipés dans les processus associés au traitement de ces deux objets (la résolution de problèmes et la construction de récit). À la suite de ce travail, nous considérons les objets *problème* et *récit* du point de vue de leur traitement : l'activité de résolution de problème et la narration comme activité de production de récit. Avec cette approche, **nous construisons différents modèles théoriques permettant de rendre compte, *a priori*, du rôle potentiel d'une activité de construction de récit dans une situation de**

résolution de problèmes de mathématiques. Nous explorons cette interaction en considérant les possibilités d'un transfert de processus cognitifs entre deux espaces : de l'espace rhétorique relatif à la construction du récit à celui de la résolution d'un problème et inversement. Nous proposons d'inscrire le récit dans le *milieu didactique* pour permettre aux élèves de s'appuyer sur les fonctions heuristiques et structurantes du récit dans une activité de résolution de problèmes.

Dans la partie III nous testons expérimentalement les modèles théoriques que nous avons développés. En nous inscrivant dans le cadre méthodologique de l'ingénierie didactique, nous avons construit et testé une expérimentation pour des élèves de cycle 3. Ce travail expérimental nous permet de déterminer différentes contraintes nécessaires à l'interaction effective entre construction de récit et résolution de problèmes. **Nous caractérisons ainsi les apports et les limites d'un milieu didactique qui intègre le récit dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes.**

Première partie

Résolution de problèmes, mathématiques et récit : Analyse des supports d'enseignement et étude des travaux existants

Cette première partie a pour ambition de différencier notre approche de l'activité de résolution de problèmes – via le récit – par rapport à l'activité de résolution telle qu'elle est proposée à l'école primaire. Notre objectif est donc, dans un premier temps de définir ce que Castela nomme un *curriculum praxique* ainsi qu'un modèle de traitement des problèmes. Il s'agit en fait, via une analyse des instructions officielles et des documents d'accompagnement des programmes pour l'école primaire, de déterminer *"l'ensemble des nécessités d'apprentissages relatives à la résolution de problèmes"* (Castela, 2008b, p. 163) et de décrire le protocole proposé aux élèves pour la pratique de cette activité. Dans le chapitre 1, nous soulignons ainsi le double statut de l'activité de résolution de problèmes pour les élèves :

- L'activité de résolution de problèmes est un outil d'apprentissage : Elle permet la contextualisation d'objets mathématiques, participe à la formation des concepts et peut être par conséquent considéré comme une aide aux apprentissages ;
- L'activité de résolution de problèmes est également un objet d'enseignement : Sa pratique nécessite la mise en place de processus cognitifs complexes qui nécessite un apprentissage.

Ce second aspect, évoqué mais non pris en charge par les instructions officielles, nous amène à questionner les méthodes d'apprentissages et d'aide à la résolution de problèmes existantes. Dans le chapitre 2, nous proposons donc une analyse de manuels scolaires centrée sur cette question. L'étude de ces ouvrages – en tant que ressources pour la classe – nous permet de rendre compte des propositions d'activités et de progressions pédagogiques qui sont faites aux enseignants. Ils donnent donc une image qui, selon nous, est un bon reflet de ce qui peut être réalisé en classe lors de séquences consacrées à l'apprentissage de la résolution de problèmes. Pour réaliser cette analyse, nous nous sommes appuyés sur une série de travaux qui ont mené cette même étude dans le cadre des programmes scolaires précédents. Tout comme les auteurs de ces recherches nous questionnons l'intention mathématique des activités proposées. Tout en actualisant leurs conclusions, nous avons complété ces travaux en nous intéressant à la représentation de l'activité de résolution de problèmes véhiculée auprès des élèves par les manuels de notre corpus. Nous complétons ces résultats en caractérisant plusieurs contraintes nécessaire à un enrichissement du milieu didactique qui soutienne l'élève dans la construction de son raisonnement.

Dans le chapitre 3, nous proposons donc de caractériser du point de vue du récit, les problèmes scolaires. Nous montrons que si les énoncés proposés dans les manuels possèdent des traits caractéristiques de récits, ils n'en possèdent pas la structure. En conclusion de cette partie, nous décrivons les principes fondateurs de notre travail de thèse : Proposer une interaction entre récit et problème de mathématiques qui permette aux élèves d'entrer dans une véritable activité de résolution de problèmes.

Chapitre 1

Modèle de traitement des problèmes à l'école primaire : définition d'un curriculum praxique

> *"De nombreux enseignants, à la fin du lycée et au supérieur, déplorent que leurs élèves ou étudiants ne savent pas résoudre des problèmes de mathématiques. Cette remarque, qui mérite d'être précisée et interrogée pour en évaluer la profondeur, appelle une question didactique fondamentale : quels savoirs souhaitons-nous que les élèves retiennent in fine de leur scolarité en mathématiques ?"*(Hersant, 2010a, p. 7)

Dans ce premier chapitre, nous proposons de définir le statut de l'activité de résolution de problèmes de mathématiques tel qu'il nous semble être véhiculé à l'école primaire. Pour cela, nous caractérisons, au travers de la lecture des instructions officielles, ce que nous avons appelé un *modèle de traitement des problèmes.* Nous considérons ainsi une activité plus vaste que la résolution effective d'un problème comprenant également la mise en place d'un protocole permettant à l'élève d'aborder, selon la situation proposée, le problème auquel il est confronté.

Nous abordons cette question en nous appuyant sur le cadre méthodologique proposé par Castela (2008b) via la définition d'un *curriculum praxique.* Il s'agit pour nous de déterminer *"l'ensemble des nécessités d'apprentissages relatives à la résolution de problèmes"* (Castela, 2008b, p. 163) [1]. Nous nous basons pour cela sur les programmes scolaires de l'année 2008 [2] ainsi que sur les documents d'accompagnements proposés par le CNDP-CRDP [3]. Dans la première section de ce chapitre nous montrons que les programmes scolaires ne présentent pas explicitement ces nécessités d'apprentissages. Les termes de

1. Corine Castela propose cette notion de *curriculum praxique* depuis la 13eÉcole d'Été (Castela, 2008a). Dans *Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement*, elle développe cet outil autour des cursus du secondaire. Elle l'utilise pour déterminer les enjeux *non explicités d'apprentissages* (Castela, 2008b) ; c'est à dire les connaissaces nécessaires à la réussite scolaire en mathématiques qui ne sont pas pris en charge (du moins explicitement) par les institutions. Dans notre travail, nous investissons cette notion de *curriculum praxique* au niveau de l'école primaire.

2. Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août (2008) et Bulletin officiel hors-série n° 3 du 19 juin (2008)

3. Centre National de Documentation Pédagogique, Centre Régional de Documentation Pédagogique

"rigueur" ou encore "goût du raisonnement" apparaissent mais aucune définition, ni dispositif permettant de les acquérir n'est proposé. Notre analyse des programmes nous amène donc à les envisager comme des *enjeux non explicités d'apprentissages*[4] (Section 1.1). Pour compléter cette lecture, nous nous intéressons dans la deuxième section aux documents d'accompagnement des programmes[5] (Section 1.2). Leur étude nous permet de reconstruire le modèle de traitement des problèmes envisagé par les instructions offficielles (Figure 1.10, p. 41). Nous concluons ce chapitre en soulignant les limites du modèle de traitement proposé et en nous interrogeant sur les nécessités d'apprentissage relatives à la résolution de problèmes.

1.1 L'activité de résolution de problèmes dans les programmes scolaires de 2008

En s'inscrivant dans les quatre domaines d'enseignement des mathématiques[6] la résolution de problèmes de mathématiques occupe une place très importante dans les programmes scolaires de 2008. Ce n'est pas un fait nouveau puisque déjà en 2002, les documents d'accompagnement des programmes pour l'école primaire indiquaient que :

> *"La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens." (Documents d'accompagnement des programmes, Charnay et al., 2002, p. 7)*

Dans notre analyse des programmes scolaires, nous allons nous intéresser aux documents produits pour l'école primaire mais également à ceux produits pour le collège. Cette double approche nous aide à repérer, dans les programmes de l'école primaire, les points qui constituent des enjeux pour la scolarité future de l'élève. Au collège, l'activité de résolution de problèmes est en effet considérée comme le cœur des apprentissages. Elle est présentée comme le symbole de l'activité mathématique. À l'école primaire, elle doit avant tout permettre *"d'approfondir les connaissances (...), de renforcer la maitrise du sens (...), de développer la rigueur et le goût du raisonnement"* (Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août, 2008, p. 23). À la lecture des programmes, nous retenons trois objectifs pédagogiques à la pratique de la résolution de problèmes en classe de mathématiques que

4. *"Des apprentissages qui doivent être réalisés par les élèves pour réussir dans la classe de mathématiques alors même que l'institution d'enseignement n'organise aucun système didactique visant explicitement à permettre la réalisation des apprentissages en question"* (Castela, 2008b, p. 137)

5. Le nombre au cycle 2 et le nombre au au cycle 3 : Documents d'acompagnement des programmes cycles 2 et 3, Dupaire & Mégard (2008).

6. Les programmes pour l'école primaire, comme ceux du collège, répartissent les savoirs mathématiques en quatre domaines : A. Organisation et gestion de données. Fonctions ; B. Nombres et calculs ; C. Géométrie ; D. Grandeurs et mesures.

nous développons dans les points suivants :

- Objectif épistémique : Permettre aux élèves d'acquérir les savoirs mathématiques et/ou de les utiliser dans différentes situations.
- Objectif épistémologique : Faire pratiquer aux élèves une activité scientifique qui se rapproche de celle du chercheur.
- Objectif méthodologique : Développer chez les élèves des capacités de raisonnement, de logique et d'abstraction.

1.1.1 Objectif épistémique : Permettre aux élèves d'acquérir les savoirs mathématiques et/ou de les utiliser dans différentes situations

À l'école primaire, les apprentissages dans toutes les disciplines doivent permettre aux élèves de construire leur rapport au monde. Cet objectif est annoncé dès la première ligne du préambule de l'école primaire en ces termes : *"Donner à chaque enfant les clefs du savoir et les repères de la société dans laquelle il grandit est la première exigence"* (p. 10). En mathématiques, cet apprentissage passe par la pratique de la résolution de problèmes. Se pose alors la question de savoir comment est envisagée la relation entre les apprentissages mathématiques et l'activité de résolution de problèmes. Si les programmes du primaire et du secondaire s'accordent sur l'importance de cette activité dans les apprentissages, ils ne lui accordent pas le même statut.

À l'école primaire, la résolution de problèmes est orientée vers l'approfondissement des connaissances. Elle complète les apprentissages plus techniques en proposant des situations concrètes, liées à la vie courante comme nous le verrons dans les manuels scolaires par la suite, pour permettre aux élèves de construire du sens. Par exemple, dans le domaine numérique, l'apprentissage des quatre opérations élémentaires est découpé dans les programmes en deux moments distincts. Un premier qui vise à faire acquérir aux élèves les techniques pour effectuer ces opérations. Un second, permettant aux élèves de *"construire le sens des opérations"* (p. 18). L'activité de problèmes doit permettre aux élèves de construire du sens en plaçant les objets et outils mathématiques dans des situations concrètes.

L'activité de résolution de problèmes est inscrite dans tous domaines des mathématiques et donc dans les tableaux de progression des cycles 2 et 3. Cependant, et c'est important à souligner, elle est positionnée à la fin de chacun des domaines (Figure 1.1, p. 26). L'apprentissage de la technique semble précéder la construction du sens tant dans le domaine numérique que dans le domaine géométrique. Au collège, à l'inverse, la résolution de problèmes doit, selon les programmes, être à l'origine de la construction des connaissances. Dans les tableaux de progression de la sixième à la troisième, cette activité surplombe, par les mots et dans la mise en page tous les autres apprentissages (Figure 1.2, p. 27). Pour bien faire, selon les instruction officielles du collège, il faudrait aborder toutes les notions par des "situations créant problème" (p. 10). Ce sont des situations qui doivent permettre de *"mettre en place"*, *"entretenir"*, *"compléter"*, *"consolider"*, *"enrichir" et "oganiser"* (p. 13-38) les connaissances. On voit bien ici la différence avec le niveau primaire avec les mots *"mise en place"*. Les auteurs vont même plus loin en proposant un *"caneva"* (p. 4) pour l'organisation d'une progression qui met en jeu des *situations-problème* (sans les nommer ainsi) au sens défini par Astolfi et Ducancel (1995) ; Astolfi, Darot, Ginsburger-Vogel, et Toussaint (2008).

L'origine des connaissances doit se trouver dans "les questions que [l'élève] se pose et dans les problèmes qu'il résoud" (p. 10). Cependant, la construction du sens et l'approfondissement des connaisances mises en avant à l'école primaire ne sont pas pour autant oubliées au collège : *"Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur des connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises jouent un rôle important"* (p. 10).

Note : Ci-dessous deux extraits des tableaux de progression niveau primaire et secondaire évoqués p. 26. On repère dans le tableau 1.1 (pour l'école primaire) que la résolution de problème est proposée en dernière position contrairement au tableau 1.2 (pour le secondaire) où elle est en tête.

			près.
	Calcul sur des nombres entiers **Calculer mentalement** - Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication. - Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, où à l'aide de la calculatrice. - Utiliser les touches des opérations de la calculatrice. **Problèmes** - Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. **Effectuer un calcul posé** - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers. - Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. **Problèmes** - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. - Utiliser sa calculatrice à bon escient. **Problèmes** - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

Figure 1.1 – Extrait des tableaux de progression niveau primaire

Objectifs		
La résolution de problèmes a pour objectifs : • de mettre en place les principaux raisonnements qui permettent de reconnaître et traiter les situations de proportionnalité, • d'initier les élèves à la présentation, à l'utilisation et à l'interprétation de données sous diverses formes (tableaux, graphiques…).		
Connaissances	**Capacités**	**Commentaires**
1.1. Proportionnalité Propriété de linéarité. Tableau de proportionnalité.	- Reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté : - utilisation d'un rapport de linéarité, entier ou décimal, - utilisation du coefficient de proportionnalité, entier ou décimal, - passage par l'image de l'unité (ou « règle de trois »), - ** utilisation d'un rapport de linéarité, d'un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme de quotient.*	Les problèmes à proposer (qui relèvent aussi bien de la proportionnalité que de la non proportionnalité) se situent dans le cadre des grandeurs (quantités, mesures). Ils doivent relever de domaines familiers des élèves et rester d'une complexité modérée, en particulier au niveau des nombres mis en œuvre. Les rapports utilisés sont, soit des rapports entiers ou décimaux simples **soit des rapports exprimés sous forme de quotient.*
Pourcentages.	- Appliquer un taux de pourcentage.	Les élèves doivent connaître le sens de l'expression « …% de » et savoir l'utiliser dans des cas simples où aucune technique n'est nécessaire.

FIGURE 1.2 – Extrait des tableaux de progression niveau secondaire

1.1.2 Objectif épistémologique : Faire pratiquer aux élèves une activité mathématique qui se rapproche de celle du chercheur.

Comme le souligne Castela (2008b), en étant au coeur du système d'enseignement, la résolution de problèmes est à la base de l'évaluation en mathématiques. De fait, *"la réussite en mathématiques dépend (...) pour l'élève de ses qualités de résolveur de problèmes"* (p. 140). Cette approche, justifiée par le fait que la résolution de problèmes à l'école est la transposition d'une *"des dimensions majeures de l'activité d'un mathématicien"* (Ibid.), est une spécificité de l'enseignement en mathématiques qui se différencie ainsi des autres discplines scolaires. La pratique d'une activité mathématique à l'école est donc conditionnée par la pratique d'une activité de résolution de problèmes. Les concepteurs des programmes de 2008 ont décliné ce *leitmotiv* tout au long des textes officiels en indiquant par exemple que *"faire des mathématiques, c'est se les approprier par l'imagination, la recherche, le tâtonnement et la résolution de problèmes, dans la rigueur de la logique et le plaisir de la découverte"*. (Bulletin officiel hors-série n° 3 du 19 juin, 2008, p. 2). Les objectifs de cette reproduction de l'activité mathématique du chercheur, présente dès l'école primaire, est exprimée dans les programmes du collège via deux niveaux de pratique. Le premier, interne aux mathématiques, présentant l'activité de résolution de problèmes comme le support de la démarche d'investigation scientifique. Le second, externe aux mathématiques, mettant en évidence les relations des mathématiques avec les autres disciplines scientifiques.

Dans les programmes du collège, la résolution de problèmes est assimilée à la démarche d'investigation. Il est dit que *"cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques)"*(Bulletin officiel hors-série n° 3 du 19 juin, 2008, p. 4).

C'est grâce à ces activités, dites de recherche, que les élèves sont supposés apprendre ce qu'est l'activité scientifique en général et mathématique en particulier :

> *"À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat ... "*(Bulletin officiel hors-série n° 3 du 19 juin, 2008, p. 9)

Les liens entre sciences expérimentales et mathématiques sont mis en avant. Durant les quatre années du collège, les élèves doivent acquérir une culture scientifique et plus précisément faire l'expérience que les mathématiques *"fournissent des outils puissants pour modéliser les phénomènes et anticiper des résultats en particulier dans le domaine des sciences expérimentales"*(Bulletin officiel hors-série n° 3 du 19 juin, 2008, p. 1).

Les programmes du collège s'éloignent ici de ceux de l'école primaire dans lesquels les mathématiques semblent plus cloisonnées et où la pratique de la résolution de problèmes n'a d'objectifs qu'à l'intérieur du cours de mathématiques lui-même. L'objectif de la résolution de problèmes au niveau primaire est avant tout de donner du sens aux concepts mathématiques. Objectif complété au niveau secondaire avec l'ambition de comprendre l'utilité des outils mathématiques dans le domaine scientifique.

1.1.3 Objectif méthodologique : Développer chez les élèves des capacités de raisonnement, de logique et d'abstraction.

Résoudre un problème de mathématiques est un travail particulier. Il ne s'agit pas simplement de trouver le résultat d'une opération mais de mettre en place un raisonement. L'élève doit être capable d'élaborer une stratégie lui permettant de résoudre le problème. Les programmes officiels mettent bien en avant cette caractéristique. Dans ceux pour l'école primaire, il est dit plusieurs fois que *"l'apprentissage des mathématiques développe l'imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement"* (p. 18). Cet apprentissage se fait en particulier dans le domaine numérique. Au collège, c'est la géométrie qui semble être privilégiée pour ces apprentissages. Elle est présentée comme étant le *"domaine de l'argumentation et du raisonnement, elle permet le développement des qualités de logique et de rigueur"* (p. 2). Cette position est tout de même nuancée par la suite. Que ce soit dans le domaine numérique ou géométrique, la résolution de problèmes est le lieu d'apprentissage du raisonnement et de la construction de preuves. D'un commun accord entre les instructions du primaire et collège : résoudre des problèmes permet d'apprendre à raisonner. Il se pose alors la question des moyens proposés aux élèves pour acquerir cette capactité.

Dans les programmes scolaires, la détermination des besoins et la mise en place de dispositifs didactiques permettant aux élèves d'acquérir les compétences requises pour résoudre un problème est laissée à la charge de l'enseignant. Au collège, les méthodes de résolution de problèmes, ne sont pas incluses dans la liste des objectifs d'apprentissage (Tableau A.1, p. 256, annexe A). Nous pouvons donc faire l'hypothèse, qu'au niveau secondaire, la résolution de problèmes a un statut d'outil, permettant l'apprentissage des mathématiques. Ceci peut s'expliquer par une ambition constructiviste marquée dans ces programmes. La résolution de problèmes est un moyen de faire travailler les élèves, elle leur permet, comme nous l'avons indiqué, d'acquérir et d'organiser leurs connaissances. De fait, la résolution de problème se doit d'être déjà au moins partiellement acquise et ne bénéficie par conséquent d'aucun apprentissage prévu par les instructions officielles. Si la construction de connaissances mathématiques semble reposer sur une vision constructiviste, l'apprentissage de la résolution de problèmes se fait par la pratique. Les élèves doivent acquérir des *"réflexes intellectuels"*, mémoriser et automatiser *"certaines procédures et raisonnements particulièrement utiles"* (p. 11).

Il semble, à la lecture de ces programmes, qu'apprendre à raisonner pourrait se réduire à apprendre à reconnaître une situation sur laquelle le raisonnement est déjà connu. Selon nous, cette acquisition de réflexes nous semble en contradiction avec la définition même du raisonnement. Dans les instructions officielles, il est tout de même signalé que cet apprentissage ne va pas de soi et doit être réalisé à l'école primaire. Les auteurs insistent sur le fait que les nécessaires reflexes intellectuels s'acquièrent *"dans la durée sous la conduite du professeur"* (p. 11). Cependant, aucun dispositif didactique n'est mis en avant, ni proposé pour favoriser l'acquisition de ces reflexes. Il est cependant intéressant de constater, que certains processus sont clairement explicités. On trouvera par exemple, dans les programmes pour le collège, la mise en évidence de pratiques telles que la *"formulation de conjectures, recherche d'élements de justification et de preuve"* (p. 4).

Il en est de même à l'école primaire où seulement trois phrases évoquent cet apprentissage. Au cycle 2, il est dit que *"la résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif"* et que les élèves *"apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations"* (p. 18). Au cycle 3, en écho avec le cyle 2, *"l'élève (...) continue d'apprendre à résoudre des problèmes"*. On voit donc bien apparaître la nécessité d'un apprentissage. Cependant, aucune proposition de dispositif didactique n'est faite, ni dans les programmes du primaire, ni dans les programmes du secondaire. L'apprentissage de la résolution de problèmes, de la construction de raisonnements apparaît donc bien au sens de Castela (2008b), comme un *enjeu non explicité d'apprentissage.*

Pour pallier à cette non-explicitation, il est possible pour les enseignants de se référer aux documents d'accompagnement des programmes proposés par le Centre National de Documentation Pédagogique. Ces documents visent en effet à "proposer des repères pour les choix de l'enseignant" (Documents d'accompagnement des programmes cycle 3, Dupaire & Mégard, 2008, p. 51). Nous les étudions donc dans le point suivant en cherchant les pistes données aux enseignants pour cet apprentissage.

1.2 Apprentissage *par* et *de* la résolution de problèmes : Documents d'accompagenement des programmes pour l'école primaire

Les documents d'accompagnement des programmes pour le deuxième et troisième cycle [7] consacrent chacun un chapitre complet à la résolution de problèmes. Dans les deux documents, cette activité est mise en avant, d'une part comme un moyen d'apprentissage et d'autre part comme nécessitant un apprentissage (sans pour autant être un objectif d'apprentissage) :

> *"Conformément aux programmes, ce document insiste sur les problèmes, en invitant à un apprentissage progressif qui seul permet de construire et d'ancrer le sens des opération."*(Documents d'accompagnement des programmes cycle 2, Dupaire & Mégard, 2008, p. 4)
>
> *"La résolution de problèmes, qui mobilise toutes ces attitudes et ces compétences [goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision], est en effet au cœur de l'activité mathématique. Et, à l'école primaire, les problèmes sont partout, comme objectif d'apprentissage mais aussi comme moyen d'accéder à de nouvelles connaissances (...) Nous distinguerons, pour l'analyse, plusieurs fonctions des problèmes : d'une part l'apprentissage par résolution de problème, en confrontant l'élève à des situations qui lui permettront en franchissant un obstacle ou en réinvestissant des connaissances dans des contextes variés d'acquérir une compétence visée ; d'autre part l'apprentissage de la résolution de problème."*(Documents d'accompagnement des programmes cycle 3, Dupaire & Mégard, 2008, p. 51)

Dans cette section, nous ne revenons pas sur les processus d'apprentissage des concepts mathématiques *par* la résolution de problèmes que nous avons évoqués précedemment. Nous nous intéressons uniquement aux pratiques proposées pour développer chez les élèves leur connaissance de l'objet problème et leurs compétences en résolution.

7. Le nombre au cycle 2 : Documents d'accompagnement des programmes cycle 2, Dupaire et Mégard (2008) ; Le nombre au cycle 3 : Documents d'accompagnement des programmes cycle 3, Dupaire et Mégard (2008)

1.2.1 Au cycle 2 : Automatiser le processus de reconnaissance de l'opération grâce à la pratique de résolution de problèmes "standards" et à la pratique du calcul mental

Au cycle 2, l'objectif est avant tout d'amener les élèves à construire le sens des opérations grâce à une utilisation de ces dernières dans des situations concrètes. Il faut pour celà que l'élève parvienne à conceptualiser l'usage des objets mathématiques dans différentes situations. Au cours préparatoire, l'objectif est de faire *"comprendre aux élèves que l'énoncé écrit d'un problème n'est souvent que l'habillage particulier d'une histoire que les élèves, ou d'autres personnes auraient pu vivre"*. Il faut de plus que l'élève parvienne *"à se dégager progressivement des manipulations"* et à *"amener l'élève à dépasser le simple stade de l'action afin de s'engager dans un processus de conceptualisation"* (p. 51). Pour cela, il est conseillé un travail spécifique d'analyse des énoncés de problèmes. En particulier de l'ordre des informations, du contexte et du vocabulaire, des redondances, de la présence d'informations implicites et de la place de la question.

Selon les auteurs, c'est la variété (des problèmes) qui amène l'élève à identifier différentes catégories de problèmes. Le rôle de l'enseignant est alors d'amener une variété *"maîtrisée"* de problèmes, de manière progressive pour permettre à l'élève de définir ces différentes catégories. Ensuite pour chacune de celles-ci, il s'agit d'optimiser les procédures utilisées et à les associer à une catégorie de problèmes.

> *Progressivement, pour une catégorie de problèmes donnée, l'enseignant amènera les élèves à optimiser les procédures mobilisées, à les comparer et à se rapprocher des procédures les plus adaptées. Cette mise en relation des problèmes d'une même catégorie amènera aussi les élèves à réinvestir les procédures précédentes et à les associer à la catégorie de problèmes ainsi construite."* (p. 52).

L'objectif de la pratique de la résolution de problèmes au cycle 2 est alors d'automatiser le processus de reconnaissance de l'opération. L'automatisation est effective si *"l'élève parvient à associer une opération à n'importe quelle situation nécessitant cette opération"* (p. 57). A noter qu'ici le terme automatisation désigne *"non pas des procédures apprises sans réflexion, mais au contraire des résultats et des raisonnements construits avec intelligence et progressivement intériorisés"* (p. 57). Un exemple de mise en oeuvre pour automatiser l'utilisation d'une opération est proposé avec la structure suivante :

1. Comprendre la situation ;
2. Dissocier cette situation d'autres déjà rencontrées ;
3. Élaborer une première procédure ;
4. Identifier cette nouvelle catégorie de problèmes et associer une opération avec cette situation.

À la fin du cycle 2, les élèves doivent être capables de résoudre des problèmes numériques standards, c'est-à-dire des *"problèmes faisant intervenir une ou plusieurs opérations dont la reconnaissances est exigible par des élèves de niveau, et dont l'énoncé s'inscrit dans le corpus habituel des manuels scolaires"* (p. 44), ou autrement dit, *"des problèmes relevant d'une application directe du sens des opérations"* (p. 52). La construction d'un raisonnement est donc associé au calcul. Ce dernier serait même à la base du raisonnement si on se réfère à la phrase suivante : *"On peut dire, notamment dans l'activité de résolution de problème, que le calcul supporte le raisonnement"* (p. 33). Or comme nous l'avons rappelé dans la première section de ce chapitre, un raisonnement ne met pas seulement en jeu une dimension calculatoire. Nous ne remettons pas en cause l'importance de cette dernière. En effet, comme nous le rappelle Kahane *"le calcul est omniprésent dans les pratiques mathématiques, il est une composante essentielle à tous niveaux, inséparable des raisonnements qui le guident ou qu'en sens inverse il outille"*(Kahane, 2002). On peut se poser la question de la prise en charge de l'apprentissage des autres processus de raisonnement. Elles ne sont pas évoquées au cycle 2.

1.2.2 Au cycle 3 : Développer les capacités de raisonnement, permettre la construction d'hypothèses et la validation mathématique des résultats

Les documents d'accompagnement des programmes du cycle 3 proposent en filigranne un modèle de traitement des problèmes de mathématiques. Pour en étudier les modalités, nous en produisons une réprésentation sous forme d'organigrammes que nous actualisons au fur et mesure de notre analyse de ces documents.

1.2.2.1 Élaboration du modèle intial

Dans le modèle proposé, les élèves apparaissent initialement comme étant responsables du choix de la procédure à réaliser. Nous représentons ci-après (Figure 1.3, p. 33) ce modèle comme annoncé sous forme d'un organigramme pour en faciliter la compréhension.

Dans la partie gauche, l'élève reconnait dans la situation proposée, une situation pour laquelle il dispose d'un modèle de résolution. Dès lors que l'élève reconnaît le type de situation auquel il est confronté, le problème est résolu. L'élève n'a plus qu'à appliquer un algorithme de résolution. Dans la partie droite, l'élève doit construire une procédure de résolution et donc traiter l'ensemble des composantes. Dans la partie droite, l'élève ne connaît de modèle de résolution pour le problème proposé. La démarche de l'élève est décrite de la manière suivante :

> *"Si l'élève (...) ne dispose pas d'un modèle mathématique qui lui aurait été enseigné auparavant, il doit alors élaborer une procédure de résolution, pouvant comporter des essais, s'appuyer sur des hypothèses... ; il doit lui-même évaluer cette procédure au fur et à mesure de sa recherche en confrontant ses résultats au but à atteindre, puis améliorer ou changer le cas échéant sa procédure de résolution ; ces deux phases sont concomitantes."* (p. 52).

À la dimension calculatoire, présentée au cycle 2, est ajoutée une dimension qui met en jeu à la fois la productions d'hypothèses et leur vérification. À ce niveau du document, l'apprentissage de la pratique de cette procédure n'est pas expliquée d'avantage.

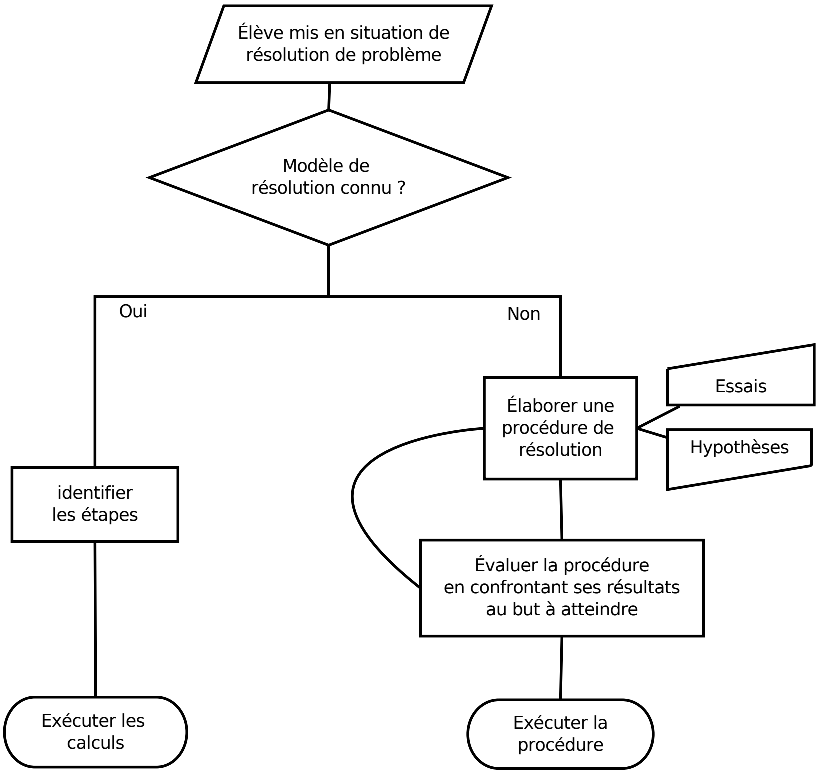


Figure 1.3 – Modèle de traitement d'un problème construit selon les documents d'accompagnement des programmes 2008 pour le cycle 3.

Une idée développée dans ces documents est que l'apprentissage de la résolution de problèmes se fait par la pratique. Un même problème, selon le moment où il est proposé aux élèves, ne remplit pas les mêmes fonctions. Prenons l'exemple d'un problème standard au cycle 2, c'est à dire un problème relevant d'une application directe du sens d'une opération. Proposer ce problème en début de progression pourra permettre aux élèves de découvrir un nouveau modèle de résolution, et ainsi participer à la construction des connaissances en résolution de problèmes. Proposé en fin de progression, ce même problème, pour lequel les élèves disposeront d'un modèle ne leur permettra pas de développer leurs compétences en résolution. Deux types de situations permettent selon les documents d'accompagenement de travailler ces compétences :

– Soit, l'élève ne dispose pas d'une procédure de résolution qu'il pourrait appliquer. Pour les auteurs il s'agit d'énoncés dépourvus de questions intermédiaires.

– Soit, l'élève est placé dans une situation non standard visant à lui permettre de prendre des initiatives, de formuler des hypothèses, et d'apprendre à les prouver. Pour les auteurs, il s'agit des problèmes ouverts.

Ces deux types d'activités ont ceci de similaire qu'elles mettent (provisoirement) de côté l'apprentissage de nouvelles notions mathématiques. Selon les auteurs, *"dans le cadre de l'école primaire, il est souvent difficile de viser à la fois un apprentissage d'une notion ou d'une technique et le développement des méthodes de recherche"* (p. 55). Avec cette phrase, les auteurs sous-entendent d'une part, qu'il est nécessaire de conduire un apprentissage spécifique de la résolution de problèmes et d'autre part que celle-ci implique, entre autres, le développement de méthodes de recherches. Sans cadre général sur cet apprentissage, il est difficile, comme l'indique les auteurs d'anticiper la construction de cet apprentissage. Ils l'envisagent cependant selon deux dimensions :

Axe 1 : En termes d'apprentissages :
"Comment aider les élèves qui, face à un énoncé, cherchent la bonne opération à utiliser ou s'adressent systématiquement au maître pour savoir "si c'est bon ?". Comment leur donner le goût de la recherche ? Comment leur permettre de prendre confiance dans leurs capacités d'initivative et de résolution ? Comment leur apprendre à utiliser leurs brouillons pour identifier leurs solutions ?" (p. 55).

Axe 2 : En termes de choix d'enseignements :
"Faut-il valoriser une procédure experte sous réserve que l'élève puisse se l'approprier même si sa propre solution en reste éloignée ? Faut-il privilégier des activités d'entraînement ? Ces choix, directement liés à l'acquisition des connaissances en jeu, peuvent ne pas être toujours compatibles avec une évolution de méthodes de recherche qui suppose parfois de laisser à l'élève une plus grande autonomie. (...) S'il est utile de proposer des situations spécifiques pour apprendre à chercher, il est nécessaire que des objectifs précis les justifient. Il s'agit de situation où certaines de ces compétences sont sollicitées à des degrès divers dans d'autres problèmes, suivant la fonction ou la complexité du problème proposé." (p. 55).

1.2.2.2 Complexification du modèle via l'étude des apprentissages spécifiques à la résolution de probèmes

Les documents d'accompagnement préconisent quatre formes d'apprentissages spécifiques que nous analysons ci-dessous : Comprendre un énoncé, planifier et rédiger des solutions, élaborer et contrôler des solutions, appréhender des raisonnements mathématiques. L'étude de ces activités nous permet de compléter le modèle de traitement des problèmes initialement présenté.

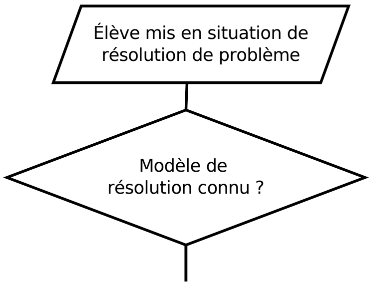


FIGURE 1.4 – Extrait du modèle initial de traitement d'un problème

La première forme d'apprentissage, **comprendre un énoncé,** en constitue l'étape initiale. Selon le modèle proposé (Figure 1.3, p. 33), c'est lors de cette étape que l'élève, en étudiant la situation détermine s'il connait ou non un modèle de résolution. Ici, la compréhension d'un énoncé consisterait à "formuler des hypothèses [8] concernant les relations possibles entre les informations présentes dans la situation évoquée et à les confirmer ou les infirmer grâce aux informations contenues dans le texte au fur et à mesure" (p. 56). Ainsi, l'élève peut se représenter la situation et lui associer, un modèle de traitement pour le résoudre.

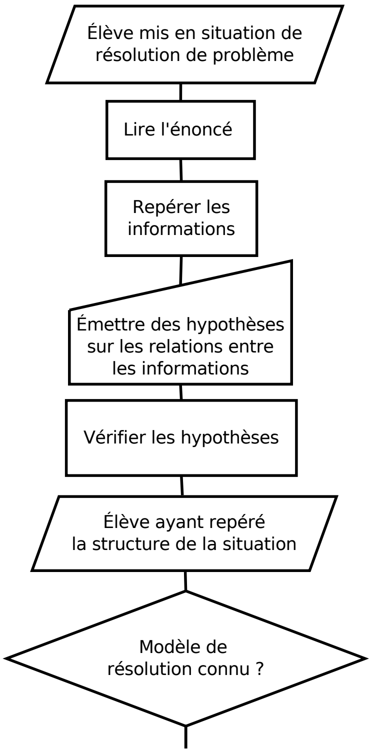


FIGURE 1.5 – Modèle de la compréhension d'un problème

Le processus de compréhension de l'énoncé est découpé en quatre étapes que nous présentons dans l'organigramme ci-contre :

- Lire l'énoncé ;
- Reprérer les informations ;
- Émettre des hypothèses sur les relations entre les informations ;
- Vérifier les hypothèses.

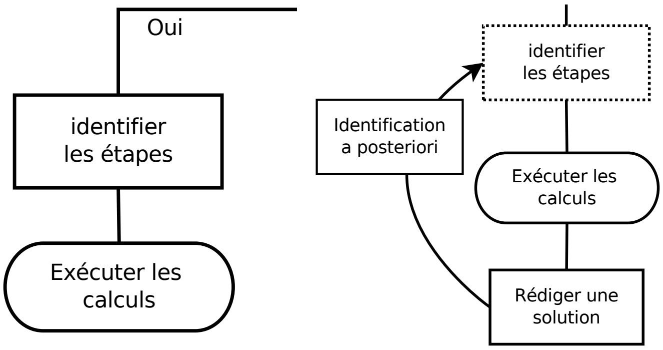
Nous pouvons ainsi compléter la première étape du traitement d'un problème selon la figure ci-contre. La compréhension du problème consiste donc pour l'élève à reconstruire les relations entre les différentes informations contenues dans l'énoncé et ainsi repérer la structure de la situation. Il peut alors déterminer s'il est en présence d'un problème pour lequel il dispose d'un modèle de de résolution ou non. Nous détaillerons dans l'analyse des manuels scolaires des propositions pour faire travailler les élèves sur cette étape de la résolution de problèmes (p. 44).

Dans la seconde forme d'apprentissage, **planifier et rédiger des solutions**, l'attention est portée sur les problèmes pour lesquels l'élève dispose d'un modèle de résolution. Il n'est donc pas ici question d'essais et de conjectures mais seulement d'identification. La planification d'une solution est réduite, comme au cycle 2, à l'identification des étapes de calcul nécessaires à la résolution de la question.

8. A noter que même si le mot hypothèse est employé, il ne s'agit pas pour les élèves d'émettre des hypothèses au sens où nous l'avons défini dans la première section de ce chapitre.

Le modèle de traitement reste, a priori inchangé nous le représentons dans la figure 1.6a.

Cependant, il est souligné que *"la planification des étapes des calculs, puis leur formulation en questions intermédiaires préparent leur mise en forme écrite ultérieure : d'autre part, celle-ci rend nécessaire l'identification a posteriori des étapes de la solution, et met en évidence la nécessité de leur planification"* (p. 57). Cette modélisation donne l'impression qu'il n'est pas possible pour l'élève de se projeter dans la construction d'une solution à la lecture de l'énoncé. Le modèle *a priori* que nous avons proposé dans la figure 1.6a peut en fait se représenter comme une action *a posteriori* selon le modèle dans la figure 1.6b. Suivant ce modèle, il s'agit plus d'une reconstruction de raisonnement que d'une construction.

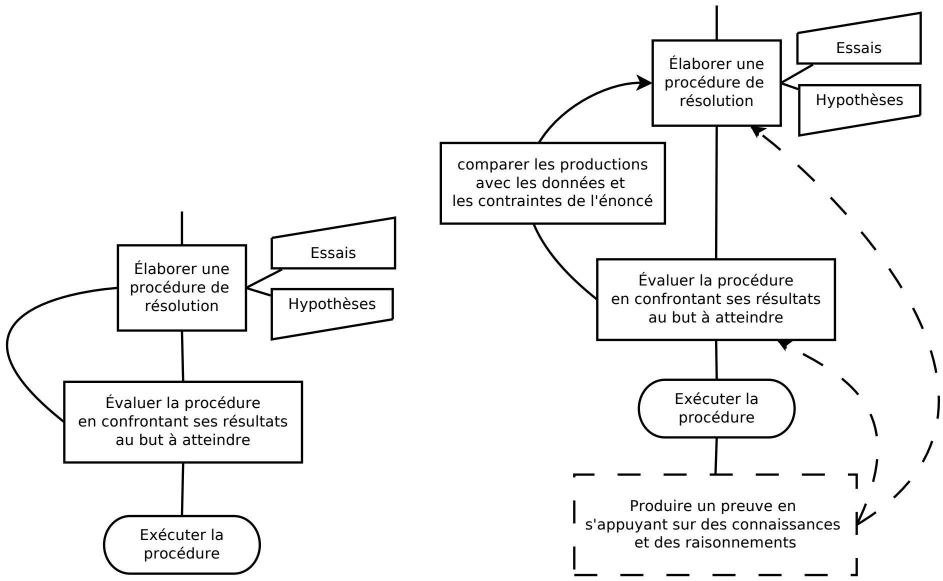


(a) Identification *a priori* (b) Identification *a posteriori*

FIGURE 1.6 – Modèle de l'identification des étapes de résolution

La troisième forme d'apprentissage, **élaborer et contrôler des solutions**, est associée unilatéralement à des problèmes non standards comme les problèmes ouverts. Ce sont ces derniers, et à la lecture des documents d'accompagnement uniquement ces derniers, qui permettent aux élèves la pratique de la prise d'initiatives, de l'émission et de la verification de conjectures. L'objectif est d'amener les élèves à :
- prendre des initiatives (faire des essais, émettre des hypothèses) ;
- contrôler par eux-mêmes leurs productions, les comparer aux données et contraintes de l'énoncé, par exemple s'organiser pour produire toutes les solutions ;
- éventuellement produire des preuves en s'appuyant sur des connaissances et des raisonnements.

Ces spécifications nous permettent de compléter le modèle de traitement des problèmes construit intialement (Figure 1.3, p. 33). La partie droite de ce premier modèle correspondant au traitement des problèmes pour lesquels l'élève ne dispose pas d'un modèle de résolution (reproduit sur la figure 1.7a, p. 37) peut finalement se représenter selon le modèle présenté en figure 1.7b (p. 37).



(a) Schéma initial (b) Schéma révisé

FIGURE 1.7 – Traitement des problèmes sans modèle de résolution

Dans leur dénomination, les deuxième et troisième formes d'apprentissage sont similaires. Cependant, leur description suggère une séparation complète ; D'un coté, la pratique de la résolution de problème dit "standard", liée à l'acquisition de connaissances mathématiques et à l'identification de procédures calculatoires. De l'autre, la pratique du problème ouvert qui permet de construire des raisonnements autres que calculatoire et de tenter de les démontrer.

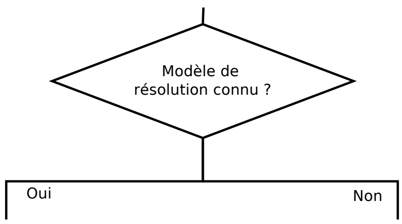


FIGURE 1.8 – Embranchement initial

L'embranchement initial du modèle de traitement des problèmes (p. 33), où le choix de la procédure devrait dépendre de l'existence pour l'élève d'un modèle de résolution, est en fait déterminé par l'objectif de l'enseignant. D'un coté, l'automatisation des procédures, de l'autre le travail de recherche. La situation dans laquelle l'enseignant place l'élève, problème connu ou problème ouvert, détermine le choix du type procédure de résolution (application d'un modèle connu contre essais et hypothèses).

La construction d'une preuve et la vérification de la justesse d'une hypothèse (en pointillés sur la figure 1.7b, p. 37) est associée à la quatrième forme de travail spécifique, **appréhender des raisonnements mathématiques**. Cette forme d'apprentissage est envisagée uniquement à l'oral, de manière collective par la confrontation des solutions proposées par les élèves. L'objectif est de permettre aux élèves d'acquérir les compétences suivantes :

- comprendre qu'une proposition mathématique doit être prouvée, qu'il ne suffit pas d'affirmer qu'elle est vraie ou fausse ;
- d'utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition générale ;
- de recourir à des savoirs pour produire oralement un raisonnement valide ;
- d'argumenter (justifier, interroger, critiquer) à propos de la validité des propositions ou des raisonnements énoncés par d'autres.

Il faut alors noter qu'il ne s'agit donc pas pour l'élève de vérifier lui même ses réponses en les confrontant à l'énoncé mais de les soumettre au débat. De plus, ce travail n'est pas envisagé dans une résolution de problème standard.

1.3 Conclusion sur l'analyse des instructions officielles

D'un modèle initial de traitement des problèmes prennant en charge les problèmes classiques et les problèmes ouverts, on aboutit en fait à deux modèles de traitement distincts (Figure 1.9, p. 40). Le choix de modèle se fait sur des critères qui ne sont pas des critères mathématiques, mais bien des critères de contrat didactique. Ces documents donnent l'impression qu'il n'est pas possible de conduire un apprentissage spécifique pour la résolution de problèmes en général.

Dans l'article, *des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes* (2002), Julo pose la question des rapports entre apprentissage et résolution de problèmes. Selon lui, les pratiques dans ce domaine (qui a trait aux recherches en enseignement et plus particulièrement à la didactique des mathématiques) peuvent s'expliquer par deux hypothèses principales. La première est qu'il aurait un *"réinvestissement quasi automatique des notions enseignées dès lors que celles ci sont "vraiment" comprises"* et la seconde que *"pour bien maitriser un type de problème, il faut en faire plusieurs de cette sorte et s'entrainer systématiquement à leur résolution"* (Julo, 2002, p. 31). Ces deux hypothèses, chacune à leur niveau (respectivement celui des notions et celui des procédures), reprennent l'idée que résoudre "intelligemment" des problèmes ne s'apprendrait pas et que, soit la solution s'impose (par l'intuition, le travail inconscient et l'intelligence), soit on résout mécaniquement après un entrainement. Cependant, et comme le souligne notemment Julo (2002, 1995) cette conception n'est pas compatibles avec les données issues de divers champs disciplinaires (comme la psychologie cognitive).

Nous faisons l'hypothèse qu'un apprentissage de la résolution de problèmes est possible et souhaitable. Mais attention, il ne s'agit pas d'envisager la résolution de problèmes comme une pratique suffisante en elle même, déconnectée des savoirs mathématiques. Il s'agit d'affirmer que **pour participer à la construction des connaissances, la résolution de problèmes doit s'envisager comme un savoir-faire à maîtriser et que, de fait, certaines techniques et pratiques inhérentes à la construction de**

raisonnements doivent être enseignées. Nous rejoignons ici, les propos de Castela (2008b) qui répondent aux objections sur la construction d'un apprentissage spécifique pour la résolution de problèmes dans les mathématiques scolaires.

> *L'enseignement en général n'a pas pour mission de former des professionnels de quelque spécialité que ce soit, en particulier des mathématiciens. On peut donc objecter qu'un enseignement de praxéologies ne se justifie qu'en tant qu'il contribue à donner du sens aux savoirs théoriques, concepts et théorèmes dont la maîtrise devrait suffire aux élèves pour traiter les problèmes qu'on leur soumet. Dans une telle perspective, les savoirs orientés vers la pratique de la résolution de problèmes, en particulier la composante pratique de certaines organisations mathématiques apparaissent comme superflus. Toutefois, à supposer qu'il soit pertinent, ce point de vue ne prend pas en compte la phase de construction du savoir théorique. Or on sait que la conceptualisation est un processus qui se développe en étroite interaction avec la fréquentation des situations d'utilisation dont il ne peut pas être un préalable"* (Castela, 2008b, p. 149)

Les instructions officielles, sans aller jusqu'à les qualifier de superflus, ne semblent pas prendre en charge ces apprentissages. Quelques pistes sont tout de même données par les documents d'accompagnement. Celles-ci proposent un travail organisé en phases successives à l'image des modélisations proposées par Pólya (1994) ou Descaves (1992) que nous présentons dans le chapitre 5. Un tel travail est sans nul doute nécessaire pour permettre aux élèves d'acquérir et de s'entrainer à la mobilisation de ces processus. Nous verrons, dans le chapitre suivant, que beaucoup de manuels proposent des activités relatives au travail individuel des processus. Cependant, du fait de leur interaction, il est important d'envisager un travail qui permette d'articuler ces processus. Celui-ci est envisagé mais on sent une rupture forte entre deux types de situations : la pratique de problèmes standard intégré à une séquence d'apprentissage sur un objet mathématique et la pratique des problèmes ouverts qui semble déconnectée des autres apprentissages. Pour compléter et enrichir cette première analyse nous proposons de nous intéresser à présent aux manuels scolaires et aux propositions d'aides à la résolution de problèmes.

Note : Les deux pages suivantes proposent différents modèles de traitement de problèmes. Dans la figure 1.9, nous produisons les deux modèles de traitement des problèmes (traitement des problèmes standard et traitement des problèmes ouverts) tels qu'ils apparaissent à la lecture des documents d'accompagenement. La figure 1.10 reprend l'ensemble des modélisations intermédiaires que nous avons effectuées : Le modèle initial proposé par les documents d'accompagenement (Figure 1.10a), le modèle complété par les différents processus à mettre en place pour traiter un problème (Figure 1.10b), les modèles complets de traitement des problèmes tels que nous les avons reconstruits (Figure 1.10c).

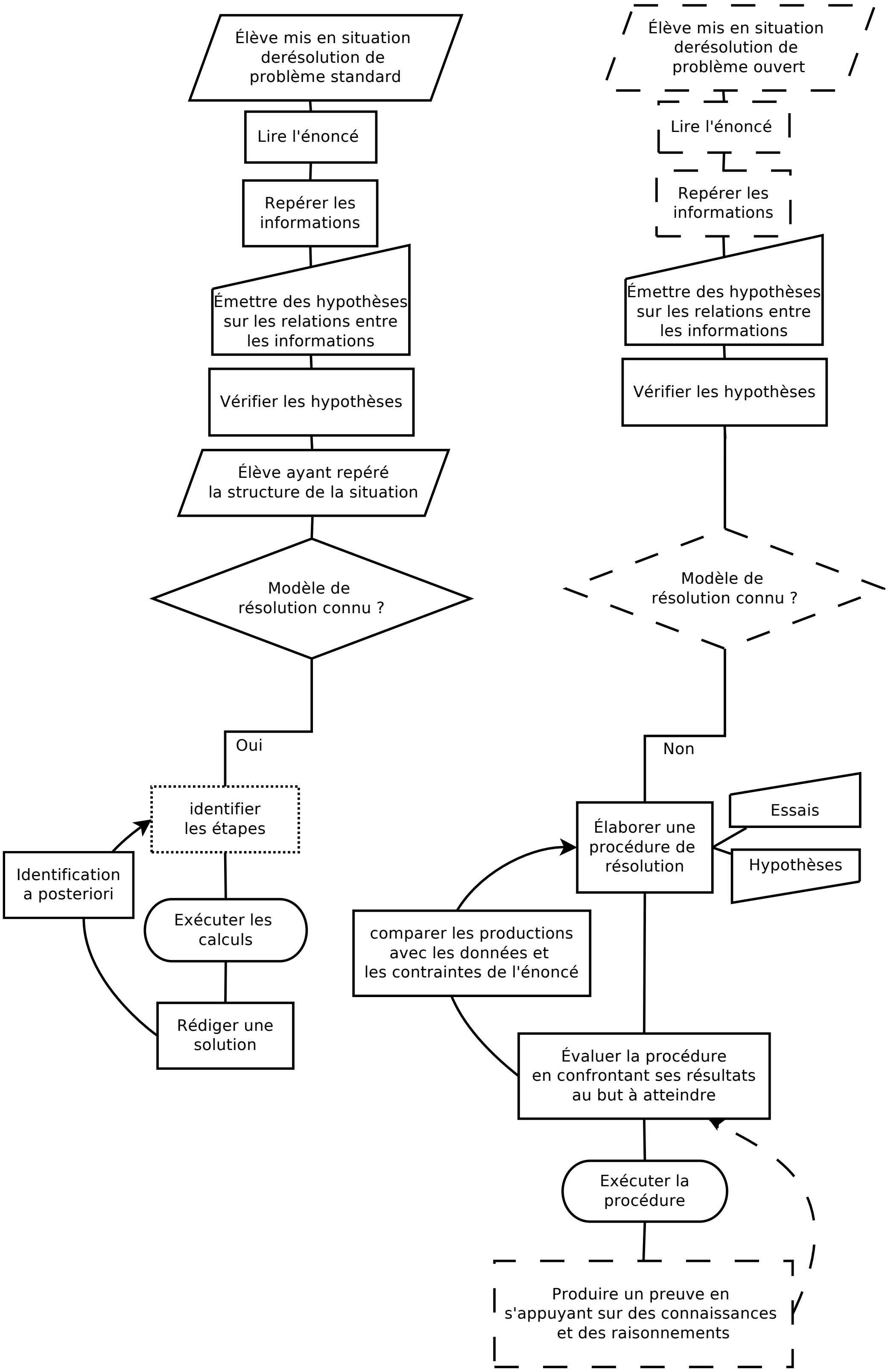
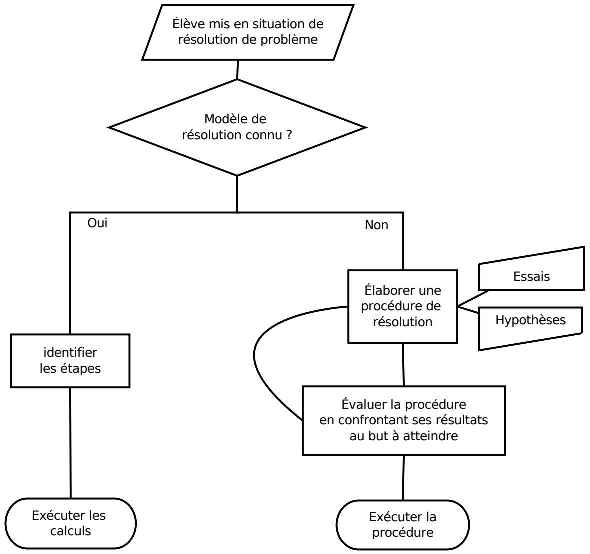
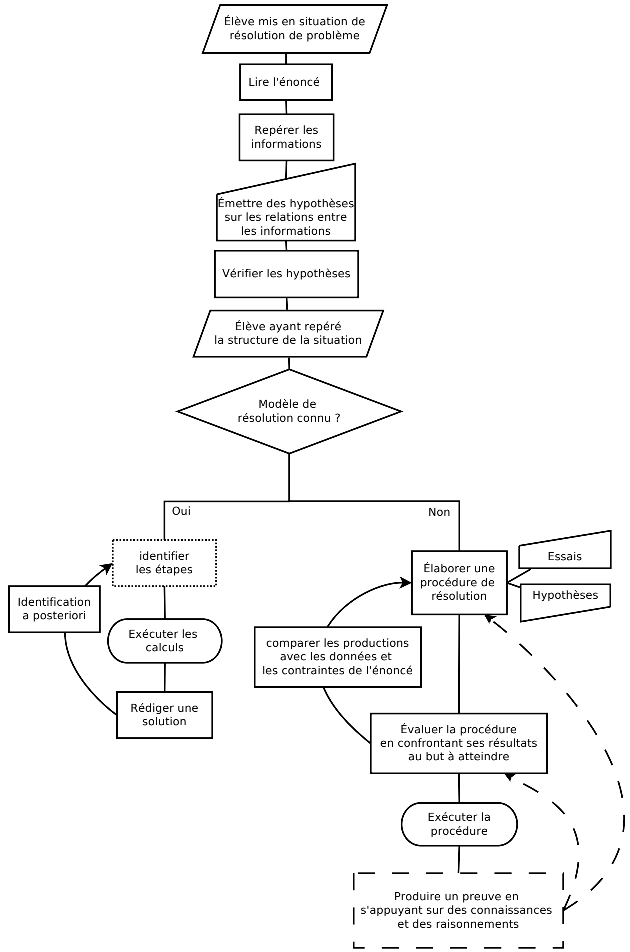


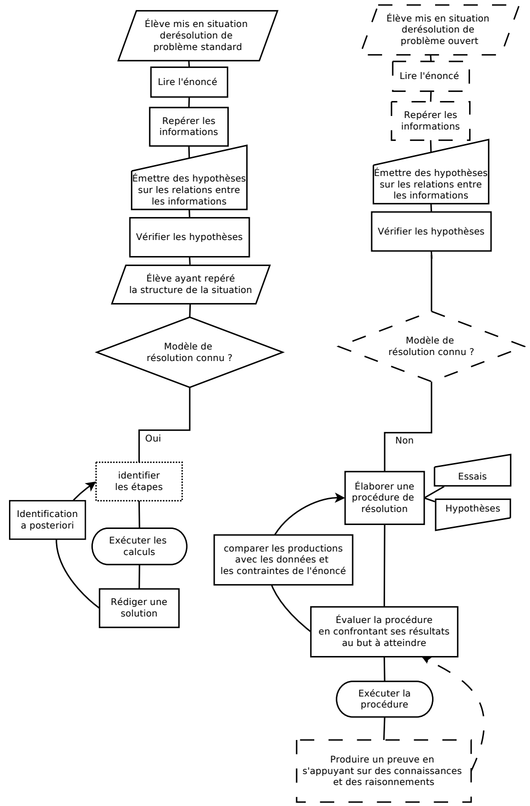
FIGURE 1.9 – Modèles de traitement des problèmes - Problèmes standards et problèmes ouverts



(a) Modèle complet initial



(b) Modèle complet proposé



(c) Modèles de traitement des problèmes - Problèmes standards et problèmes ouverts

Figure 1.10 – Modèles de traitement des problèmes selon les documents d'accompagnement des programmes

Chapitre 2

Méthodes d'apprentissage et des aides à la résolution de problèmes : analyse des supports d'enseignement

Dans ce chapitre, nous proposons une analyse d'un corpus de manuels scolaires pour l'école primaire que nous complétons par une synthèse de travaux qui se sont intéressés à l'apprentissage de la résolution de problèmes. Notre objectif est de déterminer les enjeux d'apprentissages qui sont effectivement pris en charge dans les manuels scolaires et ceux qui sont proposés dans le cadre de travaux expérimentaux. Nous utilisons pour cela une méthodologie proposée par Castela (2008b) : Une description des enjeux en termes de tâches à résoudre [1]. Elle permet en effet selon l'auteur de *"repérer et de modélier les enjeux d'apprentissage"* (Castela, 2008b, p. 151). Sans entrer dans les détails de la Théorie des Situations Didactiques qui sous-tend cette approche, nous en utilisons certains outils pour déterminer les processus en jeu dans chaque proposition. Nous proposons une critique de ces activités d'apprentissage en nous appuyant sur différents travaux posant la question de ces apprentissages spécifiques.

Le corpus que nous étudions est composé d'un ensemble de manuels de mathématiques répartis dans treize collections pour l'école primaire du cours préparatoire au cours moyen deuxième année. Ils sont conformes aux programmes scolaires de 2008. Nous y avons repéré principalement deux types d'activités :

- Travail sur la compréhension de l'énoncé de problèmes ;
- Analyse et reproduction de séquences de résolution.

Nous analysons ces deux propositions dans les deux premières sections (Sections 2.1 et 2.2) de ce chapitre.

Nous nous intéressons également à des travaux orientés vers l'aide à la résolution de problèmes et à son apprentissage. Certains de ces travaux, comme ceux de Julo (1995, 2002), proposent des approches qui ne sont pas reprises dans les manuels scolaires et qui méritent cependant qu'on s'y intéresse. Nous avons choisi de nous concentrer sur deux types d'approches :

1. Corine Castela propose dans ce même ouvrage une approche en termes de connaissances à construire.

– Restructurations d'énoncés de problèmes ;
– Aides à la représentation d'un problème.

Ces deux approches nous permettent d'aborder la question des classes de problèmes (Vergnaud, 1981) et des schémas de problèmes (Julo, 1995). Nous les analysons dans la troisième section de ce chapitre (Section 2.3).

Toutes ces approches tendent à l'amélioration des compétences des élèves en résolution de problèmes. Un commentaire s'impose à propos de leur dénomination : apprentissage ou aide. On peut penser que les démarches d'aide et d'apprentissages se différencient dans le fait que l'aide a un caractère plus ponctuel en visant la maîtrise d'une situation particulière. Pourtant toutes deux ont pour objectif que les élèves construisent un rapport aux problèmes qui leur permette d'en retirer toutes les connaissances potentiellement en jeu. Tout comme Julo, on peut faire l'hypothèse que la maîtrise d'une situation particulière peut *"contribuer à la formation de connaissances plus générales"* (Julo, 1995, p. 49) et ainsi participer à une démarche d'apprentissage de la résolution de problèmes.

2.1 Premier type d'apprentissage : Compréhension et traitement de l'énoncé d'un problème

Nous l'avons indiqué dans chapitre précédent (p. 35), les documents d'accompagnement des programmes préconisent un travail spécifique sur la compréhension des énoncés de problèmes. Cette étape de compréhension, essentielle dans l'activité de résolution, n'est pas aussi évidente qu'on pourrait le croire au premier abord. Comprendre un énoncé, ce n'est pas seulement comprendre les mots qui le composent. Il s'agit d'un véritable travail d'inférences mettant en jeu différents processus qui ne sont pas uniquement ceux que l'élève peut apprendre en cours de français. Les énoncés de problèmes de mathématiques sont en effet des *"écrits particuliers"* du cours de mathématiques. Dans *La communication scientifique*(1987), Jacobi insiste sur le fait que la lecture d'un écrit particulier nécessite le développement de *"techniques particulières"*. On peut imaginer qu'il en est de même pour un énoncé de problème.

Ce travail d'apprentissage de la lecture/compréhension est essentiel et la maîtrise du support disciplinaire que sont les énoncés de problèmes est nécessaire à l'acquisition des connaissances de la discipline, ici les compétences mathématiques (Castellani, 1995). Cette idée apparaît dans les programmes scolaires en 1995, où pour la première fois, des compétences d'ordre méthodologiques doivent être travaillées.

> *"On pourra notamment proposer à l'élève des situations lui permettant de reconnaître, trier, organiser et traiter des données utiles à la résolution d'un problème"* (Programmes de l'école primaire, 1995).

Dans les manuels scolaires produits dans les années suivantes, on voit donc apparaître différentes pages mettant en jeux ces compétences qualifiées de "*métacognitives*" (Balmes & Coppé, 1999) ou de "*transversales*" (Houdement, 1999). Cette présence marque une évolution forte des manuels. La résolution de problèmes est considérée comme une activité à part entière, qui doit être travaillée avec les élèves en tant que telle. Elle n'est plus seulement un outil d'évaluation. Les propositions les plus répandues consistent à faire travailler les élèves sur des énoncés avec des données supplémentaires ou manquantes. L'idée générale de ces leçons est d'amener les élèves à sélectionner dans l'énoncé les données utiles pour répondre à une question en plaçant au milieu des énoncés classiques des nombres qui n'interviennent pas dans le calcul permettant d'obtenir la solution. À noter que l'élimination de données superflues peut être difficile à envisager *a priori*, sans avoir résolu le problème. L'hypothèse sous-tendue par ces propositions est certainement que pour effectuer un tel travail, les élèves sont obligés de donner du sens au texte qu'ils lisent. On peut imaginer que les propositions faites par les manuels font écho aux nombreux travaux sur *l'âge du capitaine* lancés par l'IREM de Grenoble (1979). Ces recherches démontrent que les erreurs des élèves sont parfois dues à une mauvaise interprétation du contrat didactique (Brousseau, 1998). Celle-ci donnerait aux élèves l'idée que si on leur donne un problème, les données sont en nombre nécessaire et suffisant (pas de données manquantes, ni de données supplémentaires) et qu'il faut leur appliquer la dernière opération apprise pour résoudre le problème.

Dans le corpus de manuels que nous avons analysé, nous avons repéré huit types de tâches ayant pour objectif de faire travailler les élèves sur leur compréhension et leur traitement de l'énoncé des problèmes de mathématiques. Nous proposons ci-dessous huit consignes types, représentatives de ces activités. Cinq d'entre elles concernent spécifiquement le traitement de l'information, trois le traitement de la question :

Traitement des informations :
- Chercher des informations sur des supports variés (cartes, tableaux, etc.) ;
- Trier des informations ;
- Repérer l'information manquante pour pouvoir résoudre un problème ;
- Déduire ou inventer des informations à partir d'informations existantes ;
- Supprimer des données inutiles.

Traitement de la question :
- Tri des questions : celles où on ne peut pas répondre, celles où la réponse est donnée, celles qui nécessitent un ou plusieurs calculs ;
- Identification de la question d'un énoncé de problème sur une liste ;
- Invention d'une ou plusieurs questions pour un même énoncé de problème.

Ces activités sont similaires à celles étudiées par Houdement (1999) et Balmes et Coppé (1999). Elles témoignent certainement d'une volonté de prévenir l'apparition d'une interprétation erronée du contrat didactique tel que nous l'avons décrite ci-dessus. Les limites repérées par Houdement et Balmes & Coppé en 1999 semblent toujours d'actualité. D'une manière générale les divers supports proposés dans ces activité ne sont pas des problèmes de mathématiques. Comme le soulignait déjà Houdement (1999), les textes proposés contiennent bien des éléments mathématiques (généralement des nombres) mais ils ne possèdent pas les caractéristiques nécessaires pour être effectivement des problèmes. *"Les propositions d'activités sous la rubrique résolution de problèmes tournent beaucoup plus autour de la lecture des énoncés et l'organisation des informations. Elles se préoccupent beaucoup moins de l'entrée dans le contexte et du traitement effectif du problème."* (Houdement, 1999, p. 61). En illustration, nous proposons deux extraits de manuels (Figures 2.1 et 2.2, p. 46-47) proposés comme des supports pour la recherches d'informations.

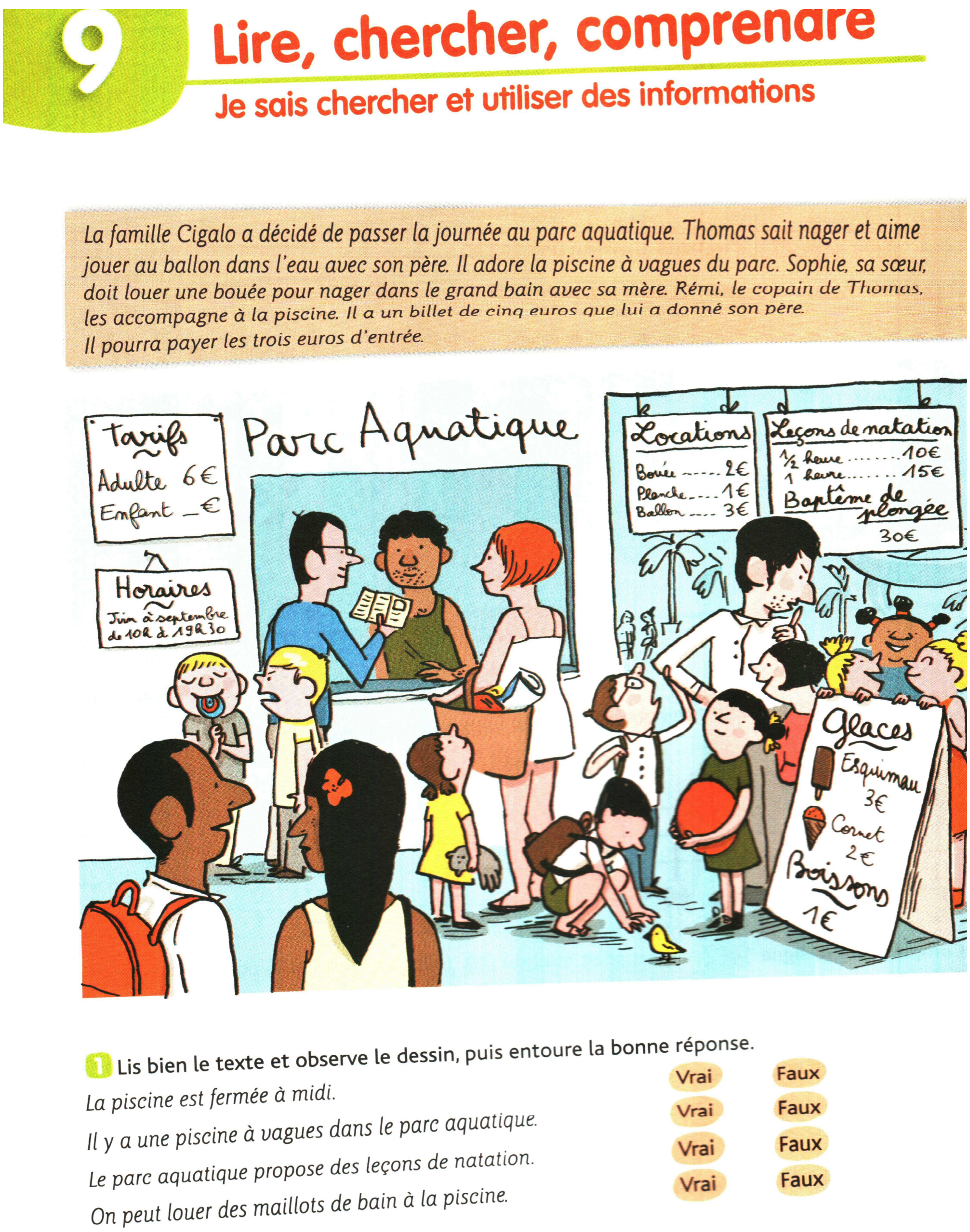
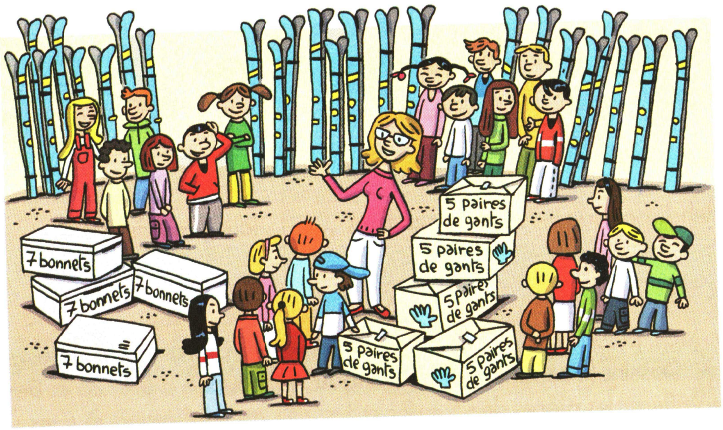


FIGURE 2.1 – Extrait *La tribu des Maths CE1*, p. 22, 2010

Rechercher • Manipuler

En classe de neige

Madame Skivite a organisé sa classe en 4 groupes de 6 élèves.



Calcule :
- le nombre d'élèves : ....
- le nombre de paires de skis : ....
- le nombre de paires de gants : ....
- le nombre de bonnets : ....

Y aura-t-il suffisamment de matériel pour tous les élèves ?
Tu peux utiliser les tables de multiplication.

Réponse : ....

FIGURE 2.2 – Extrait *Thévenet CE1*, p. 43, 2009

Les deux documents ont un caractère marqué par la présence de nombres. Les questions posées aux élèves pour leur recherche d'informations se résolvent généralement par simple lecture du document. Il s'agit d'une tâche de lecture, utile, mais sans intention mathématique. On peut également noter que les deux supports proposés en exemple contiennent un très grand nombre d'informations. Or, il est rare de proposer aux élèves une telle quantité d'informations lors d'activité de résolution classique [2]. On propose généralement aux élèves des énoncés simplifiés à l'extrême (Descaves, 1992) et ceux-ci posent pourtant des difficultés aux élèves. Comme le font Balmes & Coppé on peut se demander si *"c'est vraiment le traitement de ces informations qui pose problème."*(1999, p. 45). Il ne suffit pas de relever des informations pour résoudre un problème. Il faut être capable de les traiter en vue d'un objectif (mathématique) précis. Il est difficile de déterminer dans l'extrait proposé les compétences mathématiques qui sont sollicitées. Ce type d'activité permet avant tout de développer des compétences d'observation et de lecture, et mettent donc en jeu des processus relatifs à l'observation et la compréhension.

De la même manière, dans les activités de tri ou d'invention de questions, l'intention

2. Classique dans le sens où elle n'a pas pour but de faire travailler les compétences en résolution de problèmes. Elle est au service du développement des connaissances sur un objet mathématique particulier.

mathématique est laissée à la charge de l'élève. C'est lui qui doit proposer une catégorisation opératoire pour une activité de résolution de problème (sans qu'une question soit effectivement posée) ou poser une question qui fasse du texte donné un problème de mathématiques. Il n'y a alors pas de problème à résoudre. L'élève effectue un travail qui se situe hors contexte qu'il est supposé travailler. La présence de nombres n'est bien evidemment pas suffisante pour faire des mathématiques, encore moins pour résoudre des problèmes. Il nous paraît important de ne pas égarer cette intention mathématique pour rester dans le cadre d'une véritable résolution de problèmes. Il ne s'agit pas seulement de comprendre l'énoncé comme on devrait comprendre une langue étrangère. Il s'agit d'extraire de ces énoncés les informations qui permettent de déterminer l'ensemble de la situation. Il faut pour cela convoquer des processus de compréhension (qui sont mis en jeu dans ces activites) mais également des processus plus structurants qui eux ne sont pas sollicités par ces activités.

2.2 Deuxième type d'apprentissage : Analyse de séquences de résolution

L'idée d'une méthode universelle qui s'appliquerait à tous les problèmes de mathématiques est tentante. Polya, mathématicien de son état, s'y est confronté en définissant une méthode générale de traitement des problèmes. À un niveau plus restreint, certains manuels proposent l'apprentissage d'algorithmes de résolution. Nous avons repéré deux types d'approches : une première qui vise l'apprentissage d'un algorithme spécifique à une catégorie de problèmes ; une seconde avec un algorithme générique, une approche pragmatique à appliquer systématiquement.

2.2.1 Propositions de résolution spécifiques à un type de problèmes

Pour illustrer ce premier type d'approche, nous nous intéressons aux problèmes additifs (et soustractifs). Pour faciliter la comparaison, nous reconstruisons dans le tableau 2.1 les deux types de propositions repérées sur un même énoncé de problème. Dans les deux cas, l'élève est mis en présence d'énoncés de problèmes simplifiés au maximum. Ils comportent seulement deux nombres qui sont mis en évidence par leur écriture en chiffres et leur taille qui est largement supérieure à celle des lettres qui composent les mots.

Le choix de l'opération (ici l'addition) n'est pas explicité. L'élève entre donc dans une démarche de reproduction pour le premier type et de "remplissage" dans le second. Il n'a pas besoin de construire de raisonnement, ni de lire les énoncés pour résoudre le problème. Le travail de résolution est pris en charge par l'exemple proposé ou par la grille de réponse fournie. La construction de l'opération est déterminée par des indices

	Type 1	Type 2
Étape 1	On propose un exemple de problème additif résolu : Pierre à 3 billes, il en gagne 2. Combien a-t-il de billes ? $3 + 2 = 5$. Pierre a 5 billes.	On propose un énoncé : Pierre à 3 billes, il en gagne 2. Combien a-t-il de billes ?
Étape 2	L'élève doit reproduire l'exemple sur des énoncés similaires (au niveau de la forme et du thème).	L'élève doit compléter une grille de réponse qui indique la démarche à suivre : $\quad + \quad =$

TABLE 2.1 – Exemples d'aide à la résolution de problèmes additifs

extérieurs au problème, la composition de la page et la mise en forme de l'énoncé. Ces approches se déclinent tout au long des niveaux sur les problèmes additifs et multiplicatifs du CP au CM2. Par exemple, dans la figure 2.3 ci-dessous, la choix de l'opération est pris en charge par le manuel. L'élève n'a plus qu'à "remplir les trous".

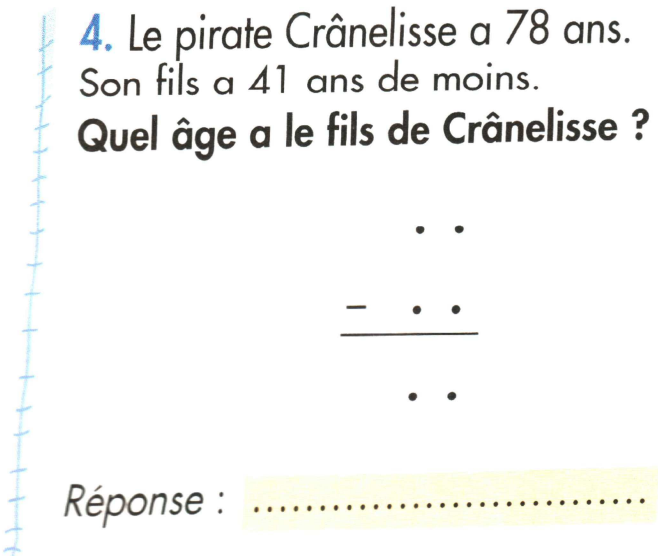
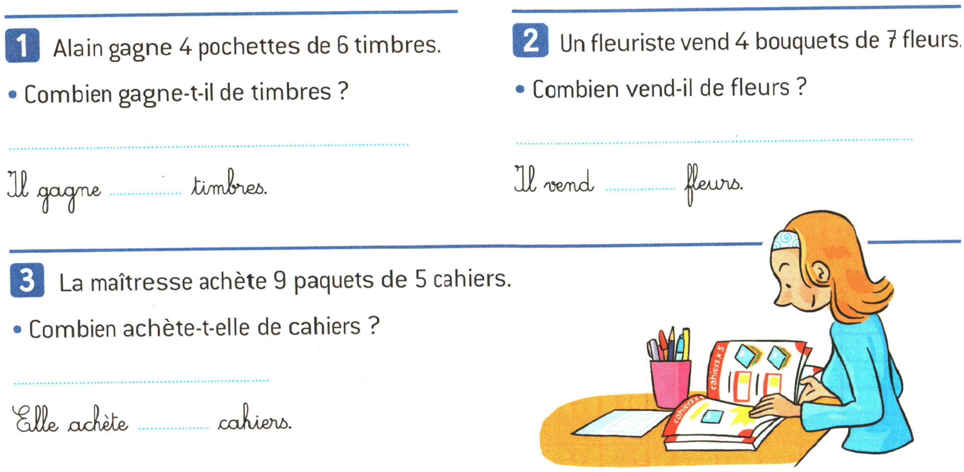


FIGURE 2.3 – Extrait : *Maths + CP*, p. 123, 2009

Dans les extraits de manuels présentés ci-après (Figures 2.4 et 2.5, p. 50), il est possible de percevoir l'idée d'une automatisation des procédures des élèves sur des problèmes classiques (*Cf.* p. 31). On propose aux élèves de reproduire une procédure. Le sens et la construction du raisonnement qui permet d'aboutir ou de choisir cette procédure ne semblent pas prises en charge.



1 Alain gagne 4 pochettes de 6 timbres.

• Combien gagne-t-il de timbres ?

....

Il gagne .... *timbres.*

2 Un fleuriste vend 4 bouquets de 7 fleurs.

• Combien vend-il de fleurs ?

....

Il vend .... *fleurs.*

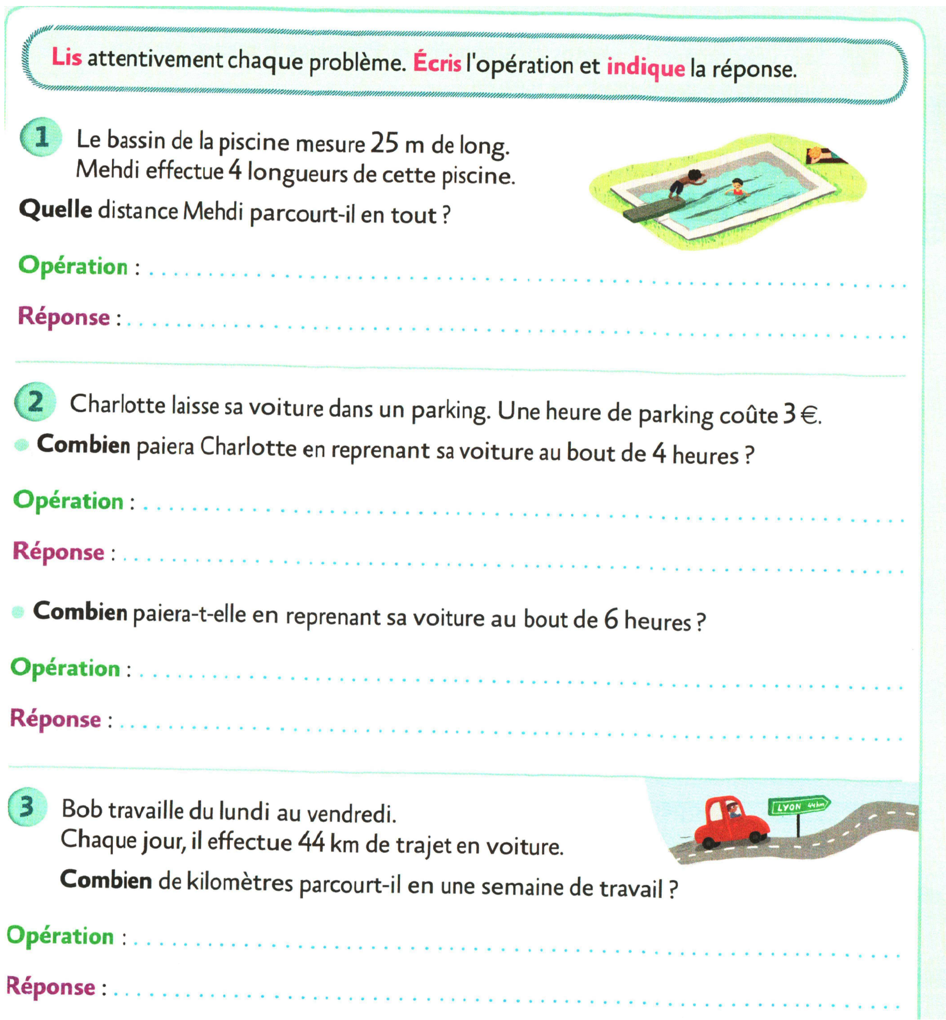
3 La maîtresse achète 9 paquets de 5 cahiers.

• Combien achète-t-elle de cahiers ?

....

Elle achète .... *cahiers.*

FIGURE 2.4 – Extrait *Clefs des maths CE1*, p. 89, 2009



Lis attentivement chaque problème. **Écris** l'opération et **indique** la réponse.

1 Le bassin de la piscine mesure 25 m de long.
Mehdi effectue 4 longueurs de cette piscine.
Quelle distance Mehdi parcourt-il en tout ?

Opération : ....

Réponse : ....

2 Charlotte laisse sa voiture dans un parking. Une heure de parking coûte 3 €.

• **Combien** paiera Charlotte en reprenant sa voiture au bout de 4 heures ?

Opération : ....

Réponse : ....

• **Combien** paiera-t-elle en reprenant sa voiture au bout de 6 heures ?

Opération : ....

Réponse : ....

3 Bob travaille du lundi au vendredi.
Chaque jour, il effectue 44 km de trajet en voiture.
Combien de kilomètres parcourt-il en une semaine de travail ?

Opération : ....

Réponse : ....

FIGURE 2.5 – Extrait *Maths+ CE1*, p. 119, 2009

2.2.2 Algorithme de traitement des problèmes

D'autres manuels vont plus loin et proposent un algorithme valable pour tous les types de problèmes. Nous détaillons ce type d'approche en prenant pour exemple l'algorithme proposé par la collection Maths tout terrain qui est le plus complet et par conséquent le plus caractéristique de cette méthode. Les auteurs annoncent dans la présentation de leur ouvrage que leur intention est de *"fournir une véritable méthodologie de résolution de problèmes et de traitement de l'information dès le CP"* (Errera & Al., 2010, p. 3). La méthodologie proposée se retrouve dans toute la collection de manuels jusqu'au CM2. L'algorithme proposé dans son intégralité dès le CE1, semble retracer différentes étapes de résolution similaires à celles proposées notamment par Descaves (1992) :

1. Comprendre l'énoncé ;
2. Faire un schéma ;
3. Résoudre ;
4. Calculer / Vérifier ;
5. Répondre.

Nous proposons dans la figure 2.6, un extrait de ce manuel présentant la méthode.

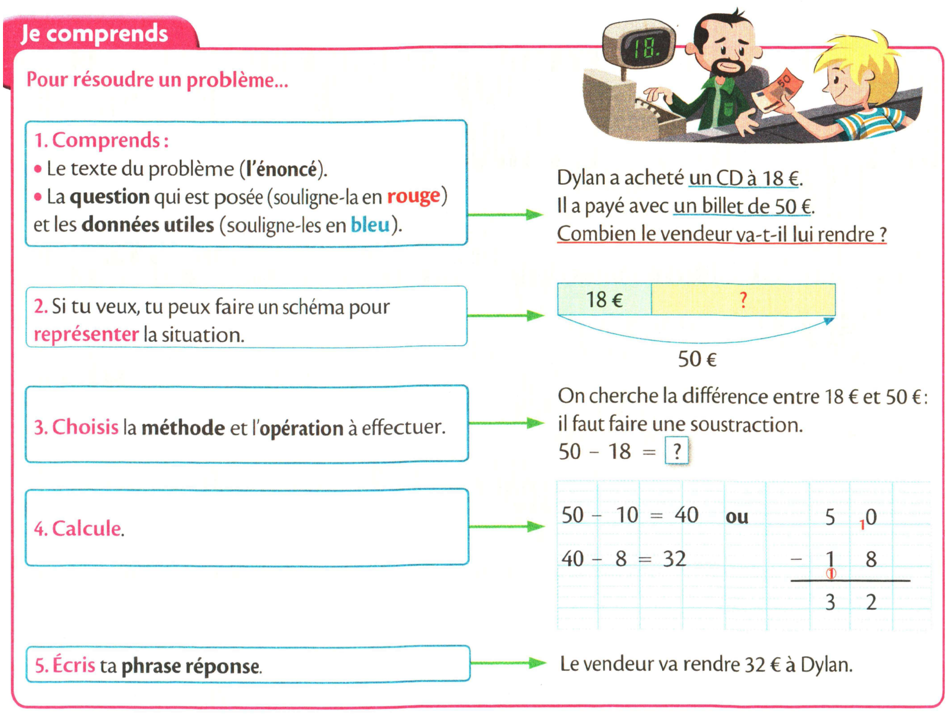


FIGURE 2.6 – Extrait *Maths tout terrain CE2*, p. 14, 2009

Pour comprendre l'énoncé (étape 1), les élèves doivent souligner la question (en rouge) et les données (en bleu). On peut émettre une réserve sur l'efficacité de ces tâches dans la résolution d'un problème. En effet, souligner la question revient avant tout à comprendre la mise en forme de l'énoncé. Il n'est pas nécessaire de comprendre le sens de l'énoncé pour cela. Il est par exemple facile de repérer une question dans un texte en langue étrangère grâce à la ponctuation (Exemple Figure A.2, Annexe A, p. 257) sans pour autant comprendre ce qui est écrit.

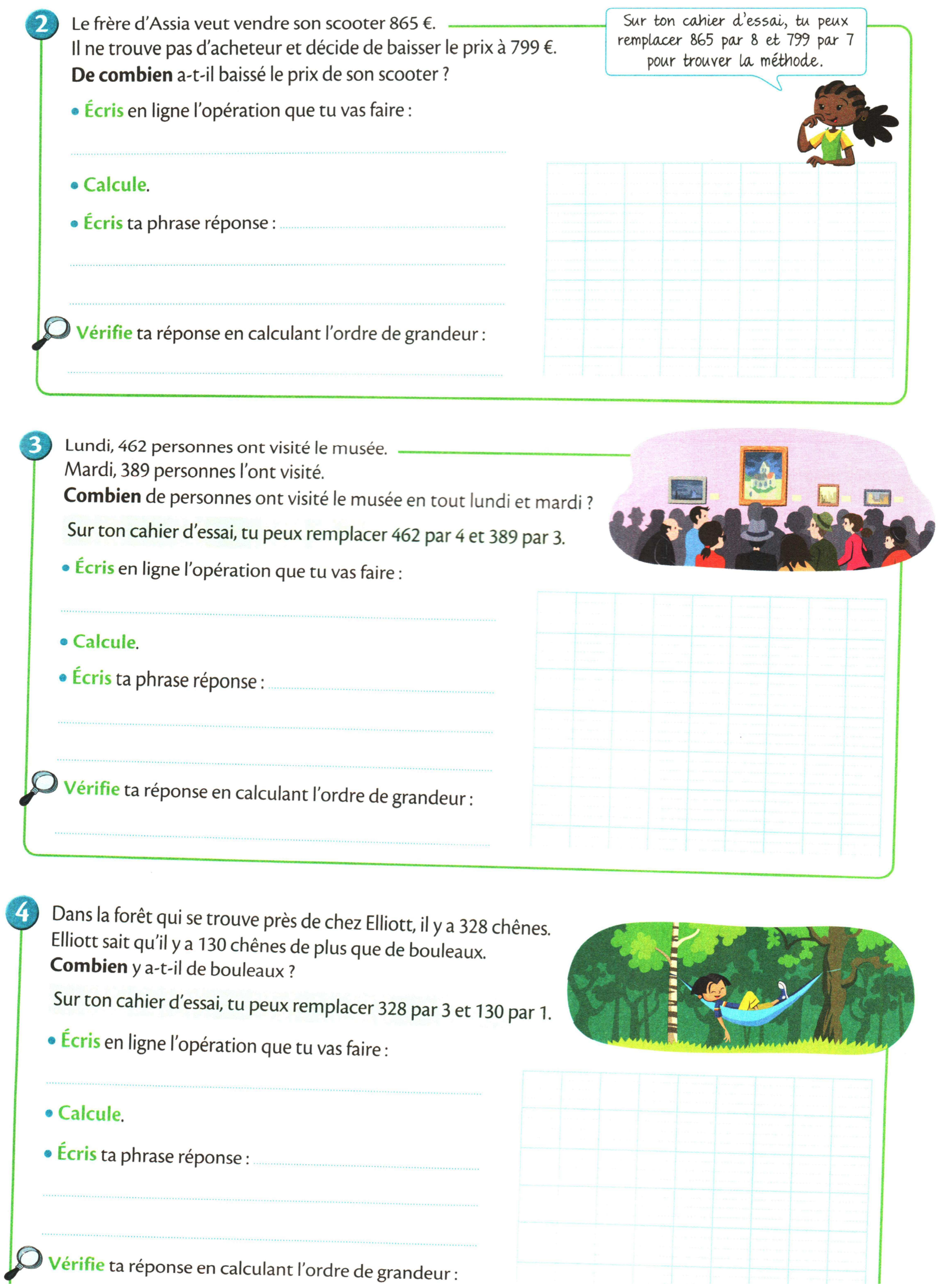
Concernant le terme "données", l'exemple présenté dans la figure 2.6 (p. 51) semble montrer que les auteurs assimilent parfois les données aux nombres (avec unité). Cela n'est bien évidemment pas suffisant. En effet, dans les deux énoncés de problèmes suivants, on obtient les mêmes "données" en soulignant les nombres :

- À la récréation, Pierre joue aux billes. Il a 3 billes et gagne 2 billes. Combien a-t-il de billes à la fin ?
- À la récréation, Pierre joue aux billes. Il a 3 billes et perd 2 billes. Combien a-t-il de billes à la fin ?

Les mots "gagne" et "perd" ne sont pas soulignés alors que c'est eux qui permettent de faire le choix entre une addition et une soustraction. Ce sont deux problèmes additifs "opposés". On peut interroger la pertinence du contrat qui se met en place avec ce type d'activités : résoudre un problème repose avant tout sur un traitement des nombres présents dans l'énoncé.

Les étapes intermédiaires de la résolution (faire un schéma, résoudre, calculer, répondre) ne sont pas guidées par des consignes aussi précises que pour la compréhension du problème. Il n'y a pas de proposition pour aider à la construction d'un schéma, ni pour expliquer le choix de l'opération (ici pourquoi c'est bien d'une différence dont il est question). Seule la dernière étape est explicitée dans d'autres pages du manuel : les élèves doivent reprendre les mots de la question pour constituer leur phrase réponse.

Dès qu'ils sont confrontés à un problème de mathématiques, les élèves peuvent retrouver ces différentes étapes, marquées par un formulaire plus ou moins détaillé (Figure 2.7, p. 53). Cette systématisation, proposée jusqu'en CM2, permet aux élèves d'aborder méthodiquement les problèmes. Cependant, telle qu'elle est construite, cette méthodologie occulte les spécificités mathématiques des problèmes. Sans aller jusqu'à *"faire de la résolution de problèmes pour la résolution de problèmes indépendamment de toute finalité conceptuelle"* (Julo, 2002), on peut craindre ici une perte de sens. De plus, cette présentation linéaire n'est pas représentative de l'activité de résolution de problèmes. Comme nous l'avons dit dans le chapitre 5, on est loin d'une démarche rectiligne dès lors que le modèle de résolution n'est pas connu. Cette approche comporte le risque de véhiculer une fausse image de cette activité.



2 Le frère d'Assia veut vendre son scooter 865 €.
Il ne trouve pas d'acheteur et décide de baisser le prix à 799 €.
De combien a-t-il baissé le prix de son scooter ?

Sur ton cahier d'essai, tu peux remplacer 865 par 8 et 799 par 7 pour trouver la méthode.

- **Écris** en ligne l'opération que tu vas faire :
- **Calcule.**
- **Écris** ta phrase réponse :

Vérifie ta réponse en calculant l'ordre de grandeur :

3 Lundi, 462 personnes ont visité le musée.
Mardi, 389 personnes l'ont visité.
Combien de personnes ont visité le musée en tout lundi et mardi ?

Sur ton cahier d'essai, tu peux remplacer 462 par 4 et 389 par 3.

- **Écris** en ligne l'opération que tu vas faire :
- **Calcule.**
- **Écris** ta phrase réponse :

Vérifie ta réponse en calculant l'ordre de grandeur :

4 Dans la forêt qui se trouve près de chez Elliott, il y a 328 chênes.
Elliott sait qu'il y a 130 chênes de plus que de bouleaux.
Combien y a-t-il de bouleaux ?

Sur ton cahier d'essai, tu peux remplacer 328 par 3 et 130 par 1.

- **Écris** en ligne l'opération que tu vas faire :
- **Calcule.**
- **Écris** ta phrase réponse :

Vérifie ta réponse en calculant l'ordre de grandeur :

FIGURE 2.7 – Extrait *Maths tout terrain CE2*, p. 41,2009

2.3 Troisième type d'apprentissage : Classification des problèmes

Nous regroupons dans cette section deux types d'approches qui ne sont pas explicitement reprises dans les manuels scolaires. Elles ont en commun leur objectif : amener les élèves à catégoriser les problèmes.

2.3.1 Restructuration des données du problème, classes de problèmes

Lorsqu'il propose en 1981, une classification des problèmes, Vergnaud amène la résolution de problèmes à se rapprocher d'une démarche par transfert. Vergnaud encourage un enseignement qui explicite et qui favorise l'utilisation de formes symboliques susceptibles d'une part, de clarifier les ressemblances et les différences entre problèmes et d'une part de faciliter l'identification des relations et des raisonnements en jeu dans chaque catégorie (Vergnaud, 1981). Grâce à la définition de classes de problèmes de plus en plus précises, l'élève peut utiliser ce qu'il a appris dans un problème déjà résolu pour résoudre un problème plus ou moins proche.

Pour aider l'élève dans cette démarche l'enseignant peut proposer à l'élève de :
- Produire un énoncé en utilisant des étiquettes (correspondant à des phrases) à remettre en ordre ;
- Reconstituer des énoncés de problèmes à partir de leurs éléments séparés et mélangés ;
- Rédiger un énoncé à partir d'informations variées ;
- Formuler et reformuler des énoncés.

L'idée générale des activités ci-dessus est de regrouper les problèmes qui ont une structure proche (capacité qui augmente avec l'expertise) pour que l'élève puisse résoudre des problèmes similaires en procédant par analogie. Cette analogie est visible une fois l'énoncé "remis dans le bon ordre" sous une structure représentative de la classe de problèmes en jeu. Elles reposent donc sur un environnement du problème qui contient, non seulement le problème lui même mais aussi, les problèmes résolus précédemment. Ce type d'activité n'est pas proposé de cette manière par les manuels scolaires que nous avons analysé. Elle transparait dans la proposition successive de problèmes similaire (structurellement) lorsqu'on propose aux élèves un modèle de résolution (Image 2.4, p. 50, exemple de problèmes multiplicatifs).

Pourtant, apprendre aux élèves a catégoriser les problèmes (particulièrement dans les domaines où l'analyse de classes est pertinente du point de vue de la compréhension est la plus adaptée) donne des résultats encourageants (Brissiaud, 1984 ; Fayol, 1990). Il n'en reste pas moins que ce travail n'est possible que sur des classes de problèmes assez développées et donc pertinentes. Il faut de plus que les élèves aient les capacités de percevoir les différences entre les différentes classes. On peut se demander que faire lorsque les classes ne sont pas encore identifiées pour la mise en œuvre d'un apprentissage ? C'est sans doute une des raisons qui explique que ce type d'approche ne soit pas proposé par les manuels scolaires.

2.3.2 Aides à la représentation, schémas de problèmes

Le travail proposé par Julo (1995, 2002) porte sur une aide à la représentation et à la mise en place de ce qu'il appelle des *schémas de problèmes*. Il en distingue trois types :

- **Les schémas type "cas"** : Chaque cas correspondant à un problème. Ce serait une sorte de bibliothèque qui se complexifie avec la maîtrise d'un domaine. On peut en prendre conscience lors d'un raisonnement par analogie explicite – *"C'est comme le problème de l'autre jour"* – mais cela reste implicite la plupart du temps. C'est une trace sémantique, non épisodique, qui diffère si le problème est compris, résolu, identifié comme exemplaire ou non (Julo, 2002, p. 36). Il est probable certains de ces "cas" acquièrent une position particulière dans la compréhension de certains concepts. Soit pour des raisons propres à l'individu, soit en raison de leur lien avec la notion : exemples privilégiés, prototypes de situations que l'on pourrait rapprocher des situations fondamentales au sens de Brousseau (1998).

- **Les schémas de type "regroupement"** (Julo, 2002, p. 36-37) : Il s'agit de blocs de problèmes reliés entre eux par des traits de surface. Il existerait des schémas correspondant à des regroupements non liés à la structure "profonde" des problèmes, des regroupement qui se mettraient en place à partir de certaines ressemblances de surface mais surtout à partir de critères pragmatiques (Par exemple problèmes de recettes / dépense). Julo fait l'hypothèse que les traits de surface d'un problème ont une importance dans la représentation d'un problème (par exemple celui d'amorçage par rapport à d'autres schémas). Il s'attache au rôle des mots (ou groupes de mots) dans la résolution mais au delà de cela il s'interroge sur la fonction cognitive des "traits de surface" qui justifie l'ancrage des énoncés dans la vie courante des élèves.

- **Les schémas de type "catégories abstraites" :** Il s'agit cette fois ci de regroupements relatifs à la structure profonde. Les catégorisations proposées par Vergnaud (1981) en font partie. *"C'est en devenant capable de percevoir la ressemblance qui existe entre deux problèmes du point de vue de leurs structures, que l'on deviendrait capable de transférer la solution d'un problème connu à un problème nouveau"* (Julo, 2002, p. 37). Ce serait la mise en place de schémas de plus en plus abstraits qui nous permettrait de percevoir et d'analyser de mieux en mieux cette ressemblance entre problèmes appartenant à une même classe.

Il faut noter que les schémas abstraits ne sont pas les remplaçants de schémas type "cas" et "regroupement". Les trois types de schémas se developpent en parallèle avec des fonctions distinctes et complémentaires qui se coordonnent. Le travail que propose Julo ne porte pas sur la catégorisation des problèmes mais sur une aide à la représentation pour favoriser le développement de tous ces schémas. Il cherche ainsi à éviter d'orienter les élèves vers une solution particulière. Il préconise pour cela une aide à la représentation des problèmes avec l'hypothèse que *"ce sont les représentations construites lors de la résolution de différents problèmes qui s'organisent progressivement en schémas de problèmes"* (Julo, 1995, p. 43). La représentation dépend des schémas déjà instanciés et disponibles mais elle contribue également à leur formation et leur évolution. En effet, toujours selon Julo *"une partie de l'activité mentale mise en œuvre dans une situation de résolution de problèmes consiste en une représentation du problème posé."* (Julo, 2002, p. 42). Cette activité débute avec les premières informations concernant le problème (contexte scolaire, genre d'ouvrage) et se poursuit jusqu'au "moment où l'on cesse de penser au problème (...)".

L'activité proposée (Julo, 1995) est une approche par multi-représentation qui sera reprise et réalisée par Nguala (2005). Elle consiste à proposer aux élèves trois problèmes *"ayant les mêmes caractéristiques – même structure, même mathématique, mêmes nombres (même réponse numérique), même syntaxe, les informations arrivant dans le même ordre avec la même organisation énonciative. Seuls les contextes varient."* (Nguala, 2005, p. 46) [3]. Cette approche, qui n'est pas présente dans les manuels scolaires que nous avons analysés, comporte l'avantage de ne pas contenir d'indices sur la résolution, de ne pas orienter vers une procédure ou modélisation. Elle est ainsi très peu directive au niveau de processus de résolution lui-même et de ne concerne à l'évidence que l'activité de représentation. L'hypothèse sous jacente pour les deux auteurs est que la variation de contexte influe favorablement sur les performances de résolution de problèmes ayant les mêmes caractéristiques. Il s'agit en quelque sorte de produire un milieu didactique par la conjonction de trois problèmes qui se ressemblent. Ils supposent que ces trois problèmes, présentés simultanément à l'élève, l'aident à la validation des solutions, que le problème de la série qui est le mieux compris – celui relatif au contexte le plus familier par exemple – aide à valider la résolution du problème le moins compris.

L'aide apportée par la multi-représentation est neutre par rapport aux difficultés intrinsèques du problème en jeu. On peut donc penser que les effets de cette multi-représentation ne se situent pas au niveau opératoire mais qu'ils concernent bien la représentation que les élèves se font du problème. *"Les élèves qui réussissent quand ils sont en présence de trois versions du problème et qui auraient échoué dans une situation normale sont donc des élèves qui ont les connaissances opératoires nécessaires pour résoudre le problème mais qui n'ont pas la possibilité de les mettre en œuvre en raison de dysfonctionnements propres aux processus de représentation (sous utilisation des connaissances opératoires)"* (Julo, 1995, p. 136). Lorsque l'élève choisit le problème, il choisit également le contexte sémantique qui lui semble le plus convenable, qu'il comprend mieux et/ou

3. Julo et Nguala testent différentes modalités de la multi-représentation pour évaluer ses apports : Multi-représentation avec choix (choisir un problème parmi les trois), représentation simple (un seul problème) ; Multi-représentation sans choix (3 problèmes à résoudre). Les résultats sont similaires pour les deux auteurs. La réussite à au moins un problème est plus élevée dans le cas de la multi-représentation sans choix, lorsqu'on propose aux élèves trois problèmes "ressemblants" à résoudre. La multi-représentation avec choix donne de meilleures performances par problème que la présentation simple. Cette modalité permet au maximum d'élèves de réussir au moins un des problèmes, donc d'une manière ou d'une autre, ils commence à s'approprier la structure mathématique sous-jacente.

qui le motive plus. Mais cette raison est insuffisante, l'effet de multi-représentation est d'ailleurs plus fort quand il s'agit de résoudre les trois problèmes. Disposer de plusieurs énoncés paraît plus déterminant. En effet, les processus de sélection des informations fonctionnent mieux en présence de trois versions, le poids du contexte étant réduit par rapport à la situation normale. De plus, la probabilité de mobiliser un schéma adapté est plus grande dans une situation de multi-représentation.

2.4 Conclusion et piste envisagée pour un travail sur l'activité de résolution de problèmes

L'analyse des manuels scolaires et des activités d'aide à la résolution de problèmes que nous venons de retracer met en évidence deux points problématiques :
- La "compréhension d'un problème" est souvent confondue avec la "compréhension de l'énoncé". Cette dernière consiste en un travail sur les éléments langagiers et repose donc avant tout sur des processus de compréhension (proposés dans les activités relatives au premier type d'apprentissage). Comprendre un problème repose avant tout sur des processus de structuration. Il ne s'agit pas seulement de comprendre les mots qui composent l'énoncé mais bien d'en extraire une structure mettant en relation les informations.
- Les manuels scolaires proposent une image de l'activité de résolution de problèmes très linéaire. Elle est divisée en étapes (dans les activités relatives au second type d'apprentissage) qui ne prennent pas en compte les spécificités de chaque problème.

En écho au travail réalisé sur les instructions officielles (*Cf.* Chapitre 1), le travail réalisé dans ce chapitre confirme le double statut de l'activité de résolution de problèmes :
- D'un côté la résolution de problèmes est présentée comme un moyen de donner du sens aux objets mathématiques. Dans cette optique, elle est vue comme un moyen permettant d'illustrer l'utilisation de certains objets mathématiques dans des pratiques. L'activité de résolution permet aux élèves de renforcer leurs connaissances et d'en acquerir de nouvelles. Elle a donc en quelque sorte l'objectif de simplifier le rapport aux mathématiques.
- D'un autre côté, la résolution de problèmes a également pour objectif de permettre aux élèves de construire des raisonnement complexes. On institue alors un rapport avec la résolution de problèmes qui ne se situe plus dans le cadre d'une relation d'aide mais comme une nouvelle difficulté.

Ces deux constats soulignent la difficulté de proposer des méthodes d'apprentissage de la résolution de problèmes. Le découpage en phases (phases de compréhension / phases de résolution) permet un travail spécifique sur certains processus mais il fausse le rapport des élèves à l'objet problème et ne leur permet pas d'en saisir toute la richesse. Dans cette optique, il nous paraît important de proposer un apprentissage qui permet d'agir sur le rapport au problème (localement et plus largement) sans prendre en charge les processus de résolution à la place de l'élève[4]. L'approche que nous envisageons dans notre thèse se fonde sur ce principe d'action. En proposant aux élèves de s'inscrire dans le récit lors de la résolution d'un problèmes, nous leur apportons un espace supplémentaire, où les différents processus relatifs à la résolution d'un problème peuvent être mis en jeu. Comme nous le dit Bruner, *"le récit nous propose des moyens simples et souples pour traiter les résulats incertains de nos projets et de nos anticipations"* (Bruner, 2008, p. 40). Nous souhaitons donc laisser aux élèves la possibilité de s'inscrire dans le cadre du récit lors de la résolution d'un problème. Ce type d'action est envisageable car, dès le début de l'école primaire, les élèves sont capables de comprendre et de produire des structures narratives très complexes (Fayol, 1985). De plus, comme nous allons le voir dans la première partie de notre thèse (Chapitres 6 et 7), le récit est un outil heuristique puissant qui lorsqu'il est correctement pris en charge permet de mettre en place des processus de structuration, problématisation et explication.

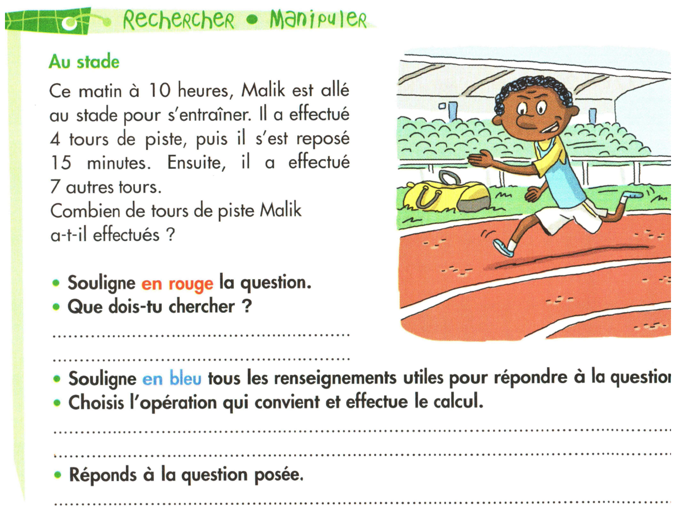
Avant d'entrer dans le corps de notre document de thèse, nous faisons un dernier détour en nous intéressant aux travaux qui évoquent le récit en mathématiques, en particulier en résolution de problèmes.

4. C'est le cas du travail de multi-représentation proposé par Julo (*Cf.* p. 55)

Chapitre 3

Caractériser la mise en récit des problèmes scolaires

Dans ce chapitre, nous proposons de nous intéresser à nouveau aux problèmes proposés par les manuels scolaires (*Cf.* Chapitre 2) mais cette fois ci en nous concentrant sur leurs aspects textuels. Comme nous pouvons le voir dans les extraits de manuels ci-après (Figure 3.1, p. 59), les énoncés de problèmes scolaires intègrent en effet des caractéristiques généralement associées au récit :



Rechercher • Manipuler

Au stade

Ce matin à 10 heures, Malik est allé au stade pour s'entraîner. Il a effectué 4 tours de piste, puis il s'est reposé 15 minutes. Ensuite, il a effectué 7 autres tours.
Combien de tours de piste Malik a-t-il effectués ?

- **Souligne en rouge la question.**
- **Que dois-tu chercher ?**

....

....

- **Souligne en bleu tous les renseignements utiles pour répondre à la questio**
- **Choisis l'opération qui convient et effectue le calcul.**

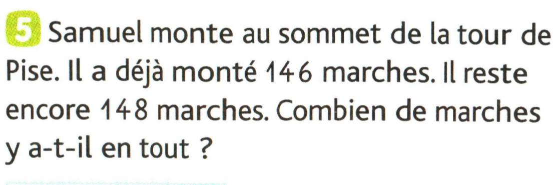
....

....

- **Réponds à la question posée.**

....

(a) Extrait *Maths + CE1*, p. 28



5 Samuel monte au sommet de la tour de Pise. Il a déjà monté 146 marches. Il reste encore 148 marches. Combien de marches y a-t-il en tout ?

(b) Extrait *Tribu des maths*, p. 134

FIGURE 3.1 – Exemples d'énoncés de problèmes avec une dimension narrative

– des personnages : Malik (a), Samuel (b).
– des évènements : Malik a effectué des tours de piste (a), Samuel a gravi un tour (b).
– un lieu : le stade d'athlétisme (a), l'Italie et la tour de Pise (b).
– etc.

Cette spécificité, non nécessaire, a amené plusieurs chercheurs à questionner cette forme narrative. Nous avons retenu deux types d'approches. Celle de Neyret (1991) et Peroz (2000) étudie plus particulièrement la manière dont les différents thèmes s'enchainent dans un texte et l'influence de cet enchaînement dans la compréhension et la résolution du problème. Celle de Camenisch et Petit (2006) qui se concentre sur l'analyse des faits de langue tels que les marqueurs temporels ou la pronominalisation. Nous les présentons dans la section 3.1. Ces deux approches, commes toutes celles qui s'intéressent à la forme narrative des énoncés de problèmes, se concentrent sur des aspects relatifs à la compréhension de l'énoncé. Dans notre travail, nous souhaitons aller plus loin en nous intéressant à la résolution effective du problème. En effet, comme nous le verrons dans la première partie de notre thèse (Chapitre 7) différentes recherches ont mis en évidence les apports du récit dans les apprentissages. Nous avions donc imaginé que cette mise en forme narrative peut jouer un rôle dans la résolution du problème. Cependant, si dans les lignes ci-dessus nous avons employé le terme *dimension narrative* la où nous aurions pu utiliser le terme *récit* c'est bien pour mettre en évidence, dès à présent, que malgré les apparences ces énoncés, proposés par les manuels scolaires, ne sont pas de véritables récits. Nous le mettons en évidence dans la section 3.2 grâce à un outil d'analyse du récit, *le schéma quinaire* (Larivaille, 1974). Nous concluons ce chapitre par un travail théorique nous permettant de définir ce que pourrait effectivement être un problème présenté sous forme d'un véritable récit qui jouerait alors un véritable rôle dans la résolution du problème.

3.1 Travaux existants

3.1.1 Analyse par progression thématique

Selon Neyret (1991) et Peroz (2000), le choix de présenter les problèmes en utilisant une forme narrative n'est pas neutre : *"Mais le "scénario" dans le temps même où il facilite l'accès au problème est aussi une source de malentendus absente des données initiales"* (Peroz, 2000, p. 55). La succession des informations joue forcément un rôle dans la manière dont l'élève perçoit le problème. L'analyse par progression thématique, utilisée par les deux auteurs, permet de mettre en évidence la *"manière dont divers groupes syntaxiques d'une phrase vont véhiculer deux types d'information, celles qui à une certaine étape du texte sont données et/ou acquises et celles qui sont nouvelles"* (Neyret, 1991, p. 90). Avant de présenter ces différentes progressions, nous précisions quelques éléments de vocabulaire :

- Le thème est l'élément d'un énoncé qui est réputé connu par les participants à la communication.
- Le rhème est un élément nouveau introduit dans l'énoncé, généralement par un déterminant indéfini ; par opposition à un thème qui est un élément connu de l'énoncé, généralement introduit par un déterminant défini.

Par exemple dans une conversation entre A et B. A s'adresse à B en disant "*C va se marier*". "*C*" est l'élément de départ connu par A et B, c'est donc le thème de la phrase. "*Va se marier* " est un élément nouveau pour B, il est introduit par A, c'est le rhème de la phrase. Un thème est un groupe d'élément qui reprend des informations connues ou présentées précédemment alors que le rhème introduit des éléments nouveaux à propos de ce thème. Thème et rhème peuvent s'enchaîner selon plusieurs types de progressions.

Progression linéaire : Dans un texte à progression linéaire, le rhème devient le thème de la partie du texte qui suit. Les phrases suivantes suivent une progression linéaire :

> "*La fleuriste revient des halles où elle a acheté 6 bottes de 25 roses chacune. Elle revend les roses à la pièce, 15F l'une. (Combien a-t-elle de roses à vendre ? Quelle somme encaisse-t-elle si elle les vend toutes ?)*".

Le thème initial (th1) est "*la fleuriste revient des halles"*, le rhème (rh1) est "*où elle a acheté 6 bottes*". Ce rhème devient un nouveau thème (th2), le rhème (rh2) étant "*de 25 roses chacune*". Ce rhème "*les roses"* devient un nouveau thème (th3) "*elle revend les roses à la pièce*", le rhème (rh3) étant "*15F l'une*". La structure d'une progression linéraire est donc : th1 lié à rh1 ; rh1 devient th2 lié à rh2 ; rh2 devient th3 lié à rh3, etc.

La progression à thème constant : Dans un texte à progression constante, il n'y a qu'un seul thème et des rhèmes liés à ce thème. C'est à dire que les nouveaux rhèmes qui apparaissent dans le cours du texte, se rapportent tous au même thème, en général annoncé au cours de la première phrase. Pour exemple, prenons le texte suivant :

> "*Damien passe dans les classes pour relever le nombre d'élève restant à la cantine aujourd'hui. Voici ce qu'il a noté sur sa feuille : CP : 4 élèves ; CE1 : 12 élèves ; CE2 : 9 élèves ; CM1 : 10 élèves ; CM2 : 11 élèves. (Quel nombre total d'inscrit va-t-il donner à la dame de la cantine ?)*"

Dans ce texte, le thème th1 de la première phrase "*Damien passe dans les classes pour relever le nombre d'élèves restant à la cantine aujourd'hui*" est repris 5 fois par la suite dont quatre fois sous forme condensée : rh1 : Voici ce qu'il a noté sur sa feuille : CP : 4 élèves ; rh2 : CE1 : 12 élèves ; rh3 : CE2 : 9 élèves ; rh4 : CM1 : 10 élèves ; rh5 : CM2 : 11 élèves. La structure de cette progression est donc th1 lié à rh1, rh2, etc.

La progression à thème éclaté : Les différents thèmes qui apparaissent dans un texte à progression éclatée font référence à un hyperthème qui est annoncé initialement ou qui se dégage au cours de la lecture du texte. Par exemple :

> "*Une bonne affaire : Paul et son papa se rendent chez le garagiste pour faire changer les 4 pneus de sa voiture. Chaque pneu coute 285F. Paul fait rapidement le calcul pour trouver le mottant de la dépense. Le papa n'est pas content. Il trouve la somme trop élevée. C'est alors que le garagiste en souriant, lui propose l'affaire suivante : « D'accord je vous fait cadeau des pneus, mais ... sur chaque roue, il y a 4 boulons. Quand je remplacerai le premier boulon, vous me donnerez 1F, au deuxième boulon, vous me donnerez 2F, au 3ème 4F et ainsi de suite en doublant le prix de chaque boulon revissé ». Paul et son père réfléchissent, se concertent ... et refusent la proposition en riant. Si toi aussi tu fais les calculs tu comprendra pourquoi ils ont refusé.*"

L'hyperthème de ce texte est indiqué par le titre "*une bonne affaire*" et par la phrase "*Paul fait rapidement le calcul pour trouver le montant de la dépense*". On peut dégager 4 thèmes qui vont se succéder au cours du récit. Th1 : *Paul et son papa se rendent chez le garagiste*; th2 *le papa de Paul n'est pas content*; th3 : *le garagiste propose une affaire*; th4 : *Paul et son père réfléchissent ... et refusent.*

Neyret met en lien la complexité de ces différentes progressions avec la difficulté de la prise d'information nécessaire à la résolution d'un problème. Il les classe selon leur difficulté. Le plus facile étant a priori la progression à thème constant. Le référent restant unique, la prise d'informations est facilité. A l'inverse, la progression linéaire nécessite une décentration à chaque changement de phrase a cause du changement de thème. La prise d'information est donc plus difficile. Enfin la progression à thème éclaté est la plus compliquée. Il faut garder en tête l'hyperthème qui "*s'éclate en différents thèmes*" [p. 93](Neyret, 1991) qui peuvent chacun avoir une progression interne différente. Cette difficulté de prise d'information ne révèle pas pour autant la difficulté mathématique du problème. Il est tout à fait envisageable d'avoir un problème difficile sur le plan mathématique présenté sous forme d'un texte à thème constant (a priori facile à comprendre sur le plan linguistique).

L'auteur propose donc de mettre en lien la complexité de ces différentes progressions avec les questions posées à l'élève dans l'énoncé du problème. Dans une progression à thème constant, le sujet est clairement identifié et les questions s'y rapportent par conséquent de manière directe. Chaque rhème apportant une information permettant de répondre à la question. Dans l'exemple de la cantine, chacun des rhèmes fournit une donnée numérique entrant dans l'opération finale. Neyret insiste sur l'importance d'une cohérence forte entre thème et raisonnement. Dans le cas de la progression linéaire il préconise d'avoir, dès le début de l'énoncé une phrase annonçant le thème de la première question. Pour l'exemple de la fleuriste il propose de débuter l'énoncé de la manière suivante : "*La fleuriste a acheté pour les revendre, 6 bottes de 25 roses chacune*" [1]. L'annonce du thème de la question (la vente de fleurs) permettrait aux élèves une meilleure anticipation des informations de l'énoncé et de leur utilisation. La progression à thème éclaté nécessite également une attention particulière au niveau de l'organisation. En effet, ce type de progression permet un schéma de questions élaboré avec une question princi-

1. En remplacement de "*La fleuriste revient des halles où elle a acheté 6 bottes de 25 roses chacune*".

pale et des questions secondaires. Pour des raisons semblables à celles annoncées pour les énoncés à progression linéaire, il est important que le thème de la question principale soit annoncé dès le début de l'énoncé afin que les élèves lisent l'énoncé en faisant attention aux informations permettant de répondre à cette question.

Le travail proposé par Peroz (2000) reprend le travail de Neyret et en nuance les conclusions. Selon Peroz, la difficulté liée à la prise d'information n'est pas liée de manière aussi directe à la complexité de la progression thématique. Influent également des facteurs liés au vocabulaire, à la présence d'un narrateur explicite, à la reprise des informations sémantiques (Peroz, 2000, p. 58). Il insiste en conclusion sur le fait que si la progression thématique permet a priori de repérer des *lieux de confusion* potentiel dans un énoncé, elle ne permet pas pour autant de classer les problèmes selon leur degré de difficulté.

3.1.2 Analyse de faits de langue

Dans *Lire et écrire des énoncés de problèmes additif : le travail sur la langue*, Annie Camenisch et Alain Petit proposent des activités permettant de mettre en évidence des faits de langue relatifs à la spécificité des énoncés de problèmes en tant que textes.

Ils s'intéressent donc à certains *faits de langue*, c'est à dire aux transformations nécessaires (ou considérées comme nécessaires) à la transformation d'une histoire en un énoncé de problème. Pour cela, ils ont proposé à un groupe de participants au trente-et-unième colloque de la copirelem une histoire à transformer en différents énoncés de problèmes. Ils ont ensuite analysé les productions des participants. Ils retiennent :

- L'ajout ou l'accentuation des marqueurs temporels (conjonctions de coordination, concordance des temps) : Dès qu'une étape de l'histoire, un évènement, n'est pas présenté chronologiquement, les marqueurs temporels qui le concernent sont accentués ou ajoutés par rapport au texte initial.
- Transformation de phrases déclaratives en phrases interrogatives :

Tout comme les auteurs des deux études présentés dans le point précédent, la conclusion apportée par les auteurs se concentre sur la compréhension de l'énoncé. Ils se demandent *"en quoi la prise de consciences de normes particulières du type d'écrit "énoncé de problème" permet-elle effectivement de mieux en maîtriser la lecture et la compréhension afin d'entrer dans un domaine exclusivement mathématique ?"*. Ce n'est pas cette question que nous posons dans la suite. Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction de ce chapitre, nous souhaitons déterminer les caractéristiques linguistiques de l'énoncé qui pourraient être utilisées dans une résolution de problèmes.

3.2 Analyse structurelle des énoncés scolaires

Dans cette section, nous reprenons en quelque sorte l'idée de base développée par Camenish et Petit : construire des énoncés de problèmes à partir d'une histoire. Nous cherchons à déterminer ce qu'il reste structurelement de l'histoire initiale une fois la transformation en énoncé effectuée. Est-ce qu'un énoncé de problème ainsi produit est effectivement un récit ou un simple texte avec une dimension narrative ? Nous utilisons pour cela, un outil d'analyse structurel du récit : le *schéma quinaire* (Larivaille, 1974). Cet outil nous permet de décrire la structure des énoncés produits relativement à la structure canonique d'un récit.

3.2.1 Présentation du schéma quinaire

Larivaille (1974) décrit le récit comme la transformation d'un état (l'état intial) en un autre état (l'état final). Cette transformation est constituée :
- d'un élément (complication) qui permet d'enclencher l'histoire et de sortir de l'état initial (qui pourrait durer éternellement sans la complication) ;
- de l'enchainement des actions (la dynamique) ;
- d'un autre élément (résolution) qui conclut le processus des actions en instaurant un nouvel état qui perdurera jusqu'à l'intervention d'une nouvelle complication.

Une histoire se présente donc, selon la modélisation de Larivaille, comme la succession de cinq étapes (Schéma quinaire) qui peuvent être répétées au sein de l'histoire et donner ainsi lieu à différents assemblages : État initial, Complication, Dynamique, Résolution et Etat final. Pour être qualifié de récit, un texte doit donc posséder, au moins une fois, chacune de ces étapes.

3.2.2 Méthodologie

Nous produisons ce travail d'analyse structurelle sur une catégorie de problèmes particulière : les problèmes additifs tels qu'ils sont définis par Vergnaud (1986). La typologie proposé par Vergnaud caractérise les problèmes additifs via la mise en évidence de structures élémentaires. De fait il est possible pour nous de croiser les structures définies par Vergnaud et celles que nous déterminons grâce au schéma quinaire dans les problèmes que nous avons construits. Nous pouvons ainsi éterminer la place laissée à l'histoire dans des problèmes qui nous le verrons sont similaires à des problèmes scolaires.

Nous avons donc commencé par construire une histoire unique à partir duquel il est possible de récréer tous les types de problèmes additifs proposés par Vergnaud : *Pierre par à l'école avec 5 billes bleues et vertes. Il a 3 billes vertes et 2 billes bleues. Il gagne 6 billes dans la journée, 2 billes le matin et 4 billes l'après midi. À la fin de la journée, Pierre a 11 billes. Marc a lui 15 billes. Il en a donc 4 de plus que Pierre.* Dans le tableau ci-après, nous présentons cette histoire découpée selon les étapes du schéma quinaire.

Étape du schéma quinaire	**Histoire**	**Codage**
Situation intiale	Pierre part à l'école avec 5 billes bleues et vertes.	INIT
Composée de deux sous-situations	*Sous-situation 1 :* Pierre a 3 billes vertes.	IN1
	Sous-situation 2 : Pierre a 2 billes bleues	IN2
Dynamique	Pierre a gagné 6 billes dans la journée.	DYN
scindée en deux étapes	*Etape 1 :* Le matin, Pierre gagne 2 billes.	DY1
	Etape 2 : L'après midi, Pierre gagne 4 billes.	DY2
Situation finale	A la fin de la journée, Pierre a 11 billes.	FIN
Etats complémentaires	Marc a 15 billes.	EC1
	Marc a 4 billes de plus que Pierre.	EC2

Table 3.1 – Découpe du récit selon le schéma quinaire

Cette histoire est constituée d'un état initial "*Pierre part à l'école avec 5 billes bleues et vertes*" (qui est composé de deux sous-situations initiales), d'une dynamique "*Pierre a gagné 6 billes dans la journée*", d'une situation finale "*A la fin de la journée Pierre a 11 billes*" et également d'un état complémentaire "*Marc a 15 billes*". Nous pouvons dès à présent noter que ce récit ne comporte ni d'étape de complication, ni d'étape de résolution. Il ne s'agit donc pas d'un récit au sens proposé par Larivaille. Cependant, la donnée de ces éléments est suffisante pour re-construire tous les types de problèmes additifs et donc pour notre travail.

A partir de cette histoire, il est possible de reconsituer différents problèmes numériques standards en combinant différentes étapes du récit, certaines étant données comme informations (données du problèmes) et d'autres étant transformées en questions (questions mathématiques du problème). Par exemple, nous pouvons reconstruire tous les problèmes de transformation d'état en sélectionnant l'étape principale de la situation initiale (INIT), l'étape principale de la dynamique (DYN) et l'étape finale (FIN). En faisant varier étapes données et étapes questionnées, il est possible de retrouver tous les types de problèmes de transformation d'état (Tableau 3.2, p. 66).

Type de problème (Vergnaud)	Etapes données	Etape questionnée	Problème obtenu
Recherche de l'état final	Etat initial (INIT) / Dynamique (DY)	État final (FIN)	*Pierre part à l'école avec ses 5 billes. Pierre a gagné 6 billes dans la journée. Combien Pierre a-t-il de billes à la fin de la journée ?*
Recherche de la transformation	Etat initial (INIT) Etat final (FIN)	Dynamique (DY)	Pierre part à l'école avec ses 5 billes. A la fin de la journée, Pierre a 11 billes. Combien Pierre a-t-il gagné de billes en tout ?
Recherche de l'état initial	Dynamique (DY) Etat final (FIN)	Etat initial (INIT)	Pierre a gagné 6 billes dans la journée. A la fin de la journée, Pierre a 11 billes. Combien avait-il de billes au début de la journée ?

TABLE 3.2 – Construction de problèmes de transformation d'états

3.2.3 Résultats

Le schéma narratif que nous avons mis en évidence est caractéristique d'un type de problème dans le sens où les étapes qui le composent sont à la fois nécessaires et suffisantes. Nécessaires car, par exemple, il n'est pas possible de faire un problème de transformation s'il n'y a pas de transformation dans l'énoncé. Suffisantes car il n'y a pas besoin de plus d'étapes que celles cités pour construire un énoncé de problème complet. Nous laissons aux soins du lecteur la reconstruction des autres types de problèmes proposés par Vergnaud (1981). Ces combinaisons permettent de rendre compte des liens qui peuvent exister entre schéma narratif et type de problème. La structure de l'histoire peut être liée à celle d'un problème de mathématique. Elles permettent également de se rendre compte des différences de structure (liées à l'histoire) entre les problèmes de mathématiques.

Nous les avons schématisées dans le tableau 3.2. Ainsi nous pouvons déterminer les étapes d'une histoire nécessaires et suffisantes pour créer un problème de mathématique.

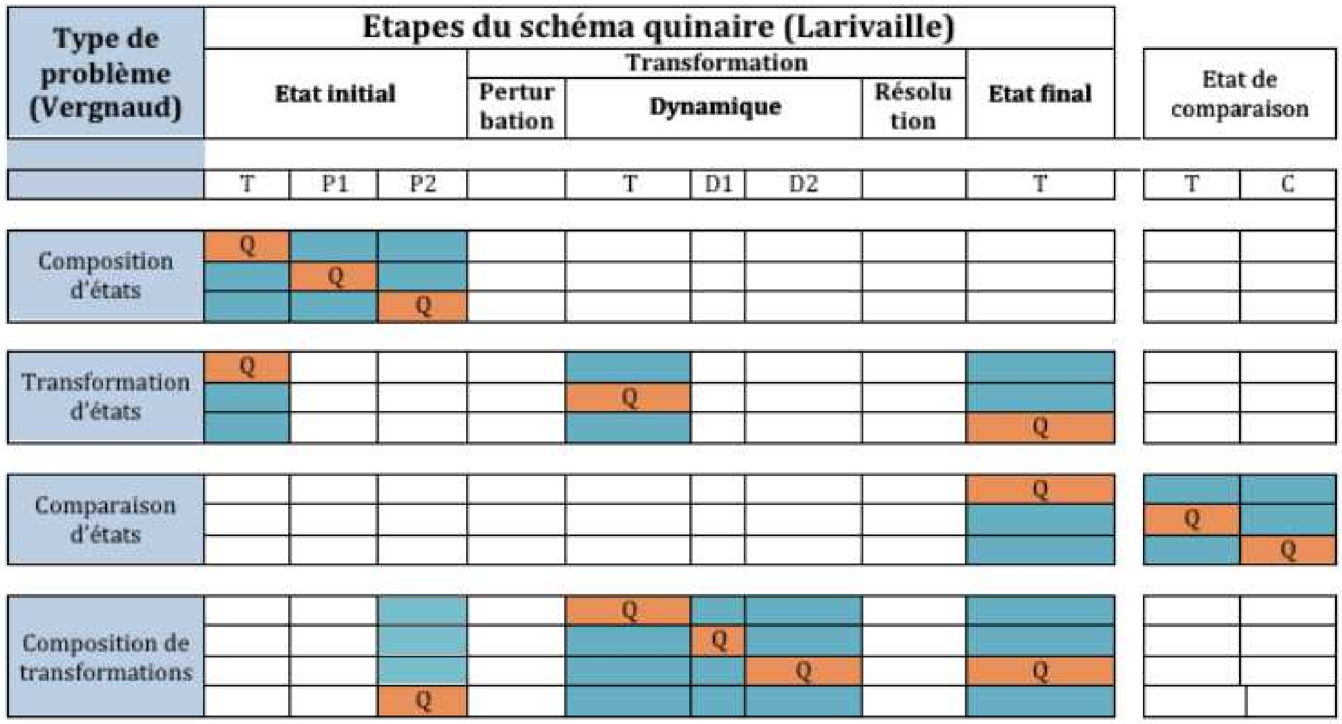


FIGURE 3.2 – Comparaison des structures - schéma quinaire et type de problème

Dans la colone de gauche, nous présentons les différents types de problèmes additifs selon la typologique de Vergnaud. Sur la première ligne, et donc à l'horizontal, les cinq étapes du schéma quinaire de Larivaille : Etat initial, perturbation, dynamique, résolution et état final. À l'intérieur du tableau, en couleur, nous avons représenté les différentes étapes du schéma narratif pour chaque type de problème additif. En bleu les informations, en rouge les questions. Nous définissons ainsi plusieurs structures élémentaires narratives, que nous pouvons qualifier de *prototypiques* car leur composition est représetnative d'un unique type de problème. Ce qui est intéressant de remarquer, c'est que les colonnes correspondant à la perturbation et à la résolution sont systématiquement vides. Nous le verrons dans le chapitre 6, c'est pourtant dans ces deux étapes que le problème porté par un récit peut se mettre en place et qui permet de mettre en place des processus de problématisation. Il semble donc un peu étrange d'appeler problème un texte qui ne comporte pas de perturbation et donc d'élément qui ferait problème. Ce qui va nous intéresser dans notre travail c'est de réintroduire cette perturbation pour que, dans le cadre d'une résolution de problèmes, l'élève puisse effectivement s'appuyer sur des processus relatifs au récit.

3.3 Caractérisation du "*récit mathématique*", "*récit de fiction mathématique*"

Catherine Tauveron – avec d'autres commme elle le dit elle même – considère *"que la lecture littéraire est une activité de résolution de problèmes, problèmes que le texte pose de lui même ou que le lecteur construit dans sa lecture"* (Tauveron, 1999, p. 17). La question qui se pose maintenant est de savoir comment un récit de fiction [2] mathématique pourrait devenir un véritable problème de mathématiques.

3.3.1 Texte avec des mathématiques et texte mathématique

Le travail réalisé par Raymond Queneau dans *Exercices de style* donne une vision assez claire de ce que peut être un texte avec des mathématiques qui ne soit pas pour autant un texte mathématique [3]. Dans ce livre, l'auteur écrit de quatre-vingt-dix-neuf manières une petite histoire résumée en quelques phrases sur le quatrième de couverture : *Le narrateur rencontre, dans un autobus, un jeune homme au long cou, coiffé d'un chapeau orné d'une tresse au lieu de ruban. Le jeune homme échange quelques mots assez vifs avec un autre voyageur, puis va s'asseoir à une place devenue libre. Un peu plus tard, le narrateur rencontre le même jeune homme en grande conversation avec un ami qui lui conseille de faire remonter le bouton supérieur de son pardessus.*. Parmis les quatre-vingt-dix-neuf versions, trois sont mathématisées.

La première, *Précisions*, est une version dans laquelle l'auteur ajoute une grande quantité de nombres :

> *À 12h17 dans un autobus de la ligne S, long de 10 mètres, large de 2,1, haut de 3,5, à 3km600 de son point de départ, alors qu'il était chargé de 48 personnes, un individu de sexe masculin, âgé de 27 ans, 3 mois, 8 jours, taille 1m72 et pesant 65 kg (...) interpelle un homme âgé de 48 ans 4 mois 3 jours, taille 1m68 et pesant 77kg, au moyen de quatorze mots dont l'énonciation dura 5 secondes et qui faisaient allusion à des déplacements involontaires de 15 à 20 millimètres. Etc.*

Ces nombres pourrait rappeler à certains des souvenirs de numération, de mesures, de conversions ... Les nombres sont souvent considérés comme un des symboles des mathématiques. Cependant, la présence, même fréquente, de ces nombres n'est pas une condition suffisante pour rendre le texte mathématiques. Ces nombres restent uniquement descriptifs et n'ont ni de lien entre eux, ni de relation directe avec l'histoire. Le personnage principal pourrait, par exemple, avoir une tout autre corpulence et s'exprimer avec douze mots que le déroulement n'en serait pas fondamentalement différent. Il est possible d'envisager d'utiliser, d'une manière ou d'une autre, les nombres présents dans le

2. Dans ce point, nous nous concentrons sur les récits de fiction car le caractère fictionnel laisse plus de libertés pour agir sur la construction et la résolution de l'intrigue.

3. Queneau (1982), *Exercices de Style*, Gallimard, France, 158p.

récit. Cependant toute question posée n'aurait pas de rapport direct avec le déroulement et la compréhension de l'histoire.

Dans la version *Géométrique*, les personnages et le décor deviennent des objets et des courbes géométriques, dans la version *Ensembliste*, des ensembles et des sous-ensembles :

> *Dans un parallélépipède rectangle se déplaçant le long d'une ligne droite d'équation $84x + S = y$, un homoïde A présentant une calotte sphérique entourée de deux sinusoïdes, au-dessus d'une partie cylindrique de longueur l>n, présente un point de contact avec un homoïde trivial B. Démontrer que ce point de contact est un point de rebroussement. Etc.*

> *Dans un autobus S, considérons l'ensemble A des voyageurs assis, et l'ensemble D des voyageurs debout. A un certain arrêt, se trouve l'ensemble P des personnes qui attendent. Soit C l'ensemble des voyageurs qui montent ; c'est un sous-ensemble de P et il est lui-même l'union de C'ensemble des voyageurs qui restent sur la plate-forme et de C" l'ensemble des voyageurs qui vont s'asseoir. Démontrer que l'ensemble C" est vide. Z étant l'ensemble des zazous, et z l'intersection de Z et de C', réduite à un seul élément. A la suite de la surjection des pieds de z sur ceux de y (élément quelconque de C différent de z), il se produit un ensemble M de mots prononcés par l'élément z. L'ensemble C" étant devenu non vide, démontrer qu'il se décompose de l'unique élément z. Etc.*

Le lexique employé par l'auteur a des sonorités facilement assimilables aux mathématiques. Chaque personne, selon son niveau en mathématiques, pourra retrouver dans ces mots des souvenirs de ses cours de mathématiques. Il faut cependant noter qu'un mot, qui semble mathématique, est inventé pour l'occasion. En effet "l'homoïde" n'est pas une figure géométrique mais un terme de botanique et de zoologie. Le récit ensembliste donne quant à lui une bonne illustration du concept d'ensemble dans la vie courante. Grâce à l'utilisation correcte des termes spécifiques aux ensembles, les notions de sous ensembles, d'union, d'intersection et d'éléments sont mises en image de manière originale et facilement accessible.

Dans les deux cas, le texte se présente comme un problème de mathématiques avec une question posée à la fin de l'énoncé. Nous pouvons repérer des hypothèses correspondant à la description de la situation initiale et à la complication (la bousculade) et une question commençant par "démontrer que". Cependant, même si ce récit prend la forme d'un exercice, les données fournies par les textes ne permettent pas de résoudre le problème. Ils sont seulement le reflet de l'histoire. Le "point de rebroussement" par exemple est l'image de la trajectoire du personnage. Dans les deux cas, les questions ne sont pas résolvables et les deux textes ne sont bien évidemment pas de véritables problèmes de mathématiques.

Ces textes, "avec des mathématiques" rendent selon nous nécessaire la définition de caractéristiques objectives permettant de qualifier un récit de "mathématique".

3.3.2 Caractéristiques d'un *récit mathématique*

Le travail de définition d'un *récit mathématique* que nous proposons ici a été réalisé par Triquet (2007) du point de vue des sciences expérimentales. Lorsque qu'il propose de travailler en sciences à travers la construction de récits de fiction, Éric Triquet définit ce qu'il appelle des *récits de fiction scientifique*. Pour l'auteur, il s'agit de récits où les aspects scientifiques sont fortement liés à la construction et à la résolution de l'intrigue et qui doivent (Triquet, 2007, p. 113) :

– *appartenir à l'hyper-genre récit, ce qui pose comme enjeu de distraire le lecteur et entraîne en particulier l'éviction du lexique de spécialité*[4]*, la prédominance de l'aspect individuel des personnsages ;*
– *revendiquer son caractère de fiction, ce qui suppose à la fois des libertés (les animaux parlent par exemple) et l'obligation de conserver la cohérence de l'unviers ;*
– *s'inscrire dans l'univers scientifique, ce qui oblige un certain contrôle de la justesse de l'information scientifique avec l'enjeu d'instruire le lecteur, en même temps que le distraire (mais une contrainte forte, posée au départ, était que la diffusion de connaissances devait se faire discrète pour ne pas nuire à la cohérence narrative).*

Triquet montre, à la fois théoriquement et expérimentalement, que l'intrigue est le support privilégié pour la prise en charge des aspects scientifiques. Nous retenons de ce travail la possibilité et la nécessité d'une co-construction entre intrigue et connaissances scientifiques. Dans le cadre d'un récit de fiction scientifique, les deux aspects se développent simultanément ou du moins dans le même temps didactique. C'est cette caractéristique, replacée dans un contexte mathématique, qui est également au cœur de notre définition. **Un *récit mathématique* intègre donc des mathématiques dans sa structure principale, c'est à dire dans son intrigue.** Les mathématiques doivent permettre :

– de construire l'intrigue : elles jouent un rôle dans ce qui "fait problème", elles sont intégrées à l'évènement perturbateur ;
– de résoudre l'intrigue : elles doivent êtres utilisées pour résoudre le problème, pour construire une explication par rapport à la perturbation.

3.3.3 Récit de *fiction mathématique*

Un récit de *fiction mathématique* doit, comme un *récit mathématique* mettre en jeu des mathématiques dans sa structure interne. Il s'agit de les intégrer véritablement à la construction du récit. Le récit ne doit pas pouvoir se dérouler sans prendre en charge ces éléments mathématiques. Il doit y avoir une dépendance forte (dans les deux sens)

4. Nous pouvons faire une remarque concernant l'éviction du lexique de spécialité : Il ne nous semble pas nécessaire que le vocabulaire spécifique à une discipline disparaisse pour que le récit soit distrayant. Nous pourrions prendre pour contre-exemples des ouvrages de science-fiction, où le vocabulaire spécifique est fondamental dans l'établissement du décor, des personnages ou de l'intrigue. Le lexique spécifique est une manière d'introduire des mathématiques dans un texte sans pour autant en ôter le caractère récréatif.

entre le monde mathématique et le monde fictionnel. Dans ce type de récit de fiction, les mathématiques ne doivent pas être cantonnées à un rôle illustratif ou anecdotique. Nous qualifions donc de *récit de fiction mathématique* des récits où l'intrigue mêle des éléments de fiction et des éléments mathématiques. L'intrigue dans sa construction commme dans sa résolution peut, par exemple, mettre en jeu :

- les propriétés d'un monde qui serait régit par une logique mathématique non négociable et qui influencerait le déroulement des évènements ;

- une pratique mathématique (recherche, calculs) qui jouerait un rôle dans la résolution de l'intrigue ;

- des personnages mathématiques (réels ou inventés) dont les caractéristiques auraient une influence sur le déroulement de l'histoire.

Nous avons fait attention dans ces exemples à mettre en relation l'élément mathématique directement avec l'intrigue. Dans le roman *Le théorème du Perroquet* de Denis Guedj par exemple, les personnages s'intéressent à l'histoire des mathématiques (en particulier au théorème de Thalès) mais l'intrigue porte sur la recherche d'un homme disparu. Les mathématiques, très présentes, n'influent pas sur le déroulement de l'intrigue principale. L'enquête menée n'utilise pas les mathématiques. Si ce texte permet d'acquerir des connaissances mathématiques, il ne s'agit pas, à notre sens, d'un *récit mathématique*. Dans ce récit de fiction, les mathématiques sont finalement utilisées comme un décor. À l'inverse, dans *Mathématique du crime* de Guillermo Martinez, les personnages principaux ont affaire à un tueur en série qui laisse après chacun de ses crimes un élément d'une suite mathématique. Les connaissances mathématiques des personnages principaux (un doctorant en mathématiques et un logicien) leur permettent de déterminer au fil de l'histoire la suite de la série. Les mathématiques participent à la construction et à la résolution de l'intrigue. Il s'agit bien d'un *récit de fiction mathématique* tel que nous l'avons défini et ceci même si c'est une interprétation métaphorique de la suite qui va permettre aux héros de stopper le meurtrier.

Nous avons centré notre définition du *récit de fiction mathématique* sur la construction et la résolution de l'intrigue. Le rapprochement entre construction d'une intrigue et la construction d'un problème (*Cf.* 7.2, p. 122) nous permet d'envisager la possibilité d'utiliser le récit (de fiction) mathématique comme une situation problématique.

3.3.4 Récit de fiction mathématique vu comme le milieu d'une situation problèmatique

3.3.4.1 Positionnements de l'enseignant et de l'élève par rapport au récit en tant que problème de mathématiques

Dans un premier temps, nous pouvons considérer le rapport de l'enseignant au récit de fiction mathématique en tant que concepteur de problèmes. Il a donc à sa charge la construction du récit :

- Le récit est un support de données, la transmission du récit / énoncé aux élèves doit permettre le partage d'informations sur la situation ;

- Le récit est un objet structuré, l'utilisation des mots de liaison par exemple permet de mettre en évidence des relations entre les informations et les évènements ;

- L'évènement problématique et l'intrigue du récit questionnent des objets ou des propriétés mathématiques ;

- La résolution de l'intrigue rend nécessaire la construction d'une explication mettant en jeu ces objets ou propriétés mathématiques. Elle est connue de l'enseignant mais en partie cachée aux élèves.

L'élève s'inscrit quant à lui dans un double rapport avec le récit. Il est dans un premier temps lecteur, et donc récepteur du récit proposé par l'enseignant. Dans un second temps, tout en restant lecteur et récepteur il devient également producteur d'une partie d'un récit, la phase de résolution qui ne lui a pas été transmise.

Dans sa posture de l*ecteur et de récepteur de récit* :

- Le récit est un texte à comprendre et interpréter, l'élève doit repérer les différentes informations fournies ;
- Le récit est un objet structurant, l'analyse (grammaticale) du texte permet de déterminer en partie la situation, telle que nous l'avons définie en tant que composante du problème, porté par le récit ;

Dans sa posture de *producteur de récit* :

- L'intrigue du récit est un support à la problématisation, l'élève peut s'appuyer sur son caractère heuristique pour déterminer les questions mathématiques auxquelles il doit répondre ;
- La structure narrative du récit est un support concret pour les élèves pour imaginer des explications, l'espace ouvert par la fiction permet d'envisager de plusieurs manières le problème posé par le récit ;
- La logique du récit et sa cohérence interne (nécessaire) participe au contôle des explications produites et permet à l'élève un choix raisonné ;

- Le récit est un outil d'expression et d'argumentation qui participe à l'élaboration d'une justification voire d'une preuve mathématique.

Enseignant et élève, en abordant le récit de fiction comme un problème de mathématiques, construisent un rapport au récit qui est tour a tour contraignant et assistant. Cette ambiguité nous fait penser au rapport qu'entretient l'élève avec le milieu didactique (Brousseau, 1988).

3.3.4.2 Variations du récit et variations du milieu didactique

Le récit est un support flexible dans le sens où il est facile d'imaginer différentes formes de récit pour une même situation. Ces variations portent sur :

- **le ratio entre informations et relations fournies par le récit et informations et relations implicites ; le rapport, nécessaire ou non, de ces informations à la construction et à la résolution de l'intrigue ;**
- **la nature, le nombre et l'ordre des évènements, ils peuvent se réaliser successivement ou en parallèle et être présentés chronologiquement, à rebours ou dans un ordre aléatoire ;**
- **le nombre d'évènements problématiques, de complications et donc de questions à résoudre ; le nombre de problèmes secondaires (ou intermédiaires) porté par chaque complication ;**
- **la possibilité ou non d'imaginer plusieurs explications ainsi que la nature et la précision des éléments permettant de les valider.**

Toutes ces possibilités de variations sont des espaces pour construire des variables didactiques. En effet, dans le cadre d'un récit de fiction mathématique, les informations, les relations, les événéments, les complications, les explications prennent en charge des mathématiques. De fait, l'enseignant peut jouer sur ces variations, d'un point de vue mathématique, comme il le ferait avec des variables plus classiques. Sous certaines conditions, il est possible d'imaginer que le récit soit suffisament dense pour proposer une situation qui soit adidactique. L'élève interagit avec le récit comme il le fait avec le milieu dans le cadre d'une activité de résolution de problème. Nous pouvons faire l'hypothèse que le récit en tant qu'élément antagoniste de l'élève (il lui pose des informations et des contraintes) peut permettre à l'élève d'enclencher, de structurer et de valider son raisonnement.

Conclusion

Les problèmes de manuels scolaires sous forme de texte proposent bien des énoncés avec des caractéristiques qui se rapprochent de celle d'un récit. Cependant, comme nous venons de le montrer, il ne s'agit pas de véritables récits. Il avait déjà été souligné, notamment par Descaves (1992), que la majeure partie des énoncés scolaires possèdent une structure très simple. Des énonces qualifiés de *canoniques*, qui induisent la réponse par l'ordre des données et la mise en évidence de chiffres. L'analyse en terme de structure que nous venons de produire, nous permet de souligner que si les énoncés possèdent effectivement une dimension narrative, celle-ci n'est pas mobilisable dans la construction du problème comme dans la construction du raisonnement. Les étapes caractéristiques du récit, qui permettent de mobiliser des processus de problématisation (la complication et la résolution) ne sont pas présents dans les énoncés scolaires.

Chapitre 4

Principes de notre approche de la résolution de problèmes par le récit

Lorsqu'il est question de récit, on pense tout d'abord à un objet linguistique, racontant une histoire et exhibant des caractéristiques de forme singulières. Il existe cependant deux niveaux permettant de considérer le récit. Le premier, comme nous venons de le décrire, approche le récit comme un objet déjà produit qui peut être étudié en tant que tel, en classe, par les élèves. Le second aborde le récit sous l'angle de son élaboration, lors de sa production comme mode de pensée, au regard de fonctions heuristiques et structurantes que nous définirons (*Cf.* Chapitre 7). Dans notre travail, pour privilégier ce second aspect qui nous permet de nous appuyer sur le récit pour construire une pensée, nous définissons le récit comme une **production**[1] :

> ***Récit :*** **Production, orale ou écrite, relatant une succession d'évènements organisés autour d'un élément problématique[a]. Ces évènements mettent traditionnellement en jeu des personnages engagés dans des actions dans un cadre spatio-temporel déterminé.**
>
> *a.* L'élément problématique, parfois appelé "perturbateur" est un élément essentiel du récit. C'est au moment où il apparait, en bousculant l'ordre des choses établi, que le récit débute.

Nous l'avons déjà souligné, deux principaux types de recherche ont posé la question de l'interaction entre récit et mathématiques en résolution de problèmes :

– D'une part, les travaux qui s'intéressent à la forme des énoncés de problèmes et à l'influence de celle-ci sur la compréhension et la résolution du problème. Le récit est alors évalué en tant qu'aide ou obstacle à la représentation, en amont ou au démarrage du processus de résolution.

– D'autre part les travaux sur les *narrations de recherche* où le récit est un outil permettant aux élèves de verbaliser leur démarche. Le travail de mise en récit joue

1. Nous présentons dans le chapitre 6 de ce document les éléments théoriques qui nous ont permis d'aboutir à cette définition. Il s'agit en particulier des travaux de Genette (1972) et Bruner (2008).

alors un rôle qui est avant tout méta-mathématique. Il est généralement proposé aux élèves en accompagnement d'un *problème pour chercher*. L'objectif pour l'élève est de prendre du recul sur son approche de la résolution de problèmes.

Dans notre travail, nous posons une question différente. Celle de l'apport de la production de récit, en tant qu'objet heuristique, dans la construction d'un raisonnement en résolution de problèmes. À notre connaissance, cette approche n'a jamais été explorée en didactique des mathématiques. Par conséquent, nous avons été amenés à considérer des concepts et des outils extérieurs à notre discipline et à construire des modèles dont la prise en charge peut être difficile pour le lecteur. Nous proposons dans cette conclusion un avant-goût du travail expérimental réalisé et espérons ainsi apporter au lecteur les fondamentaux nécessaires à l'appréhension [2] des différentes dimensions de notre thèse et de ses apports pour la didactique. Sans nous attarder sur les concepts théoriques ni anticiper sur les résultats de nos analyses nous présenterons les principes qui ont guidé la conception et la réalisation de notre travail.

2. Dans une perspective de compréhension et d'évaluation.

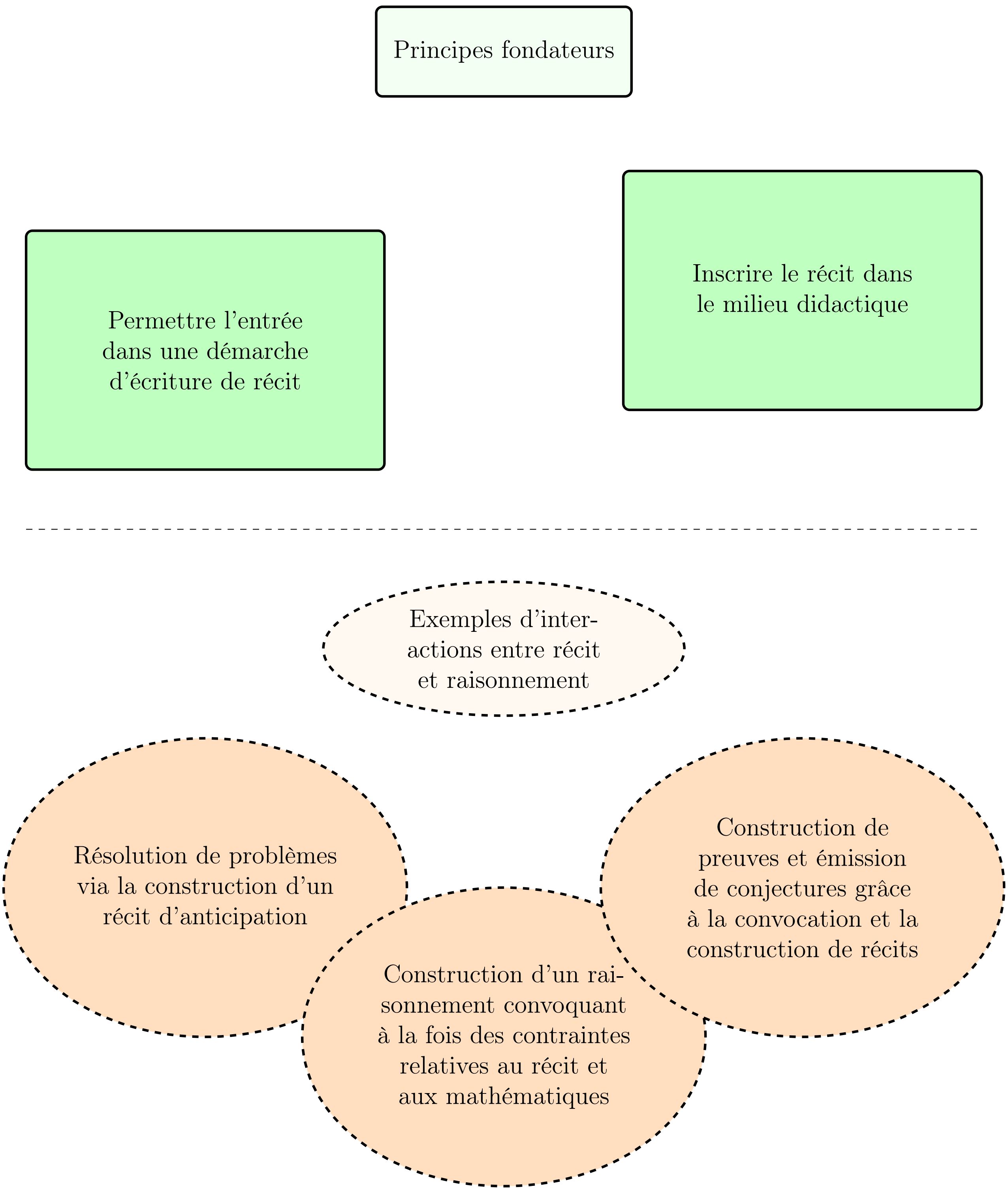


Figure 4.1 – Extraits de notre travail expérimental

Permettre l'entrée dans une démarche d'écriture de récit

L'écriture, à fortiori celle d'un récit, n'est pas une pratique classique en classe de mathématique. Pour permettre aux élèves d'entrer dans cette démarche nous avons débuté notre séquence par l'écriture d'un *récit descriptif*. Ce type de récit se base sur une situation vécue ou existante. Il est par conséquent plus facile à produire qu'un *récit d'anticipation* qui nécessite une invention. Nous avons donc proposé aux élèves une situation concrète qui leur permet d'agir. Pour cela, nous avons construit notre situation autour d'un jeu (de toupies) [3] connu des élèves. Ainsi après avoir joué, les élèves pouvaient produire un premier récit relatant, de manière chronologique ou non, la succession des manches et l'évolution du score pour entrer dans une démarche d'écriture de récit.

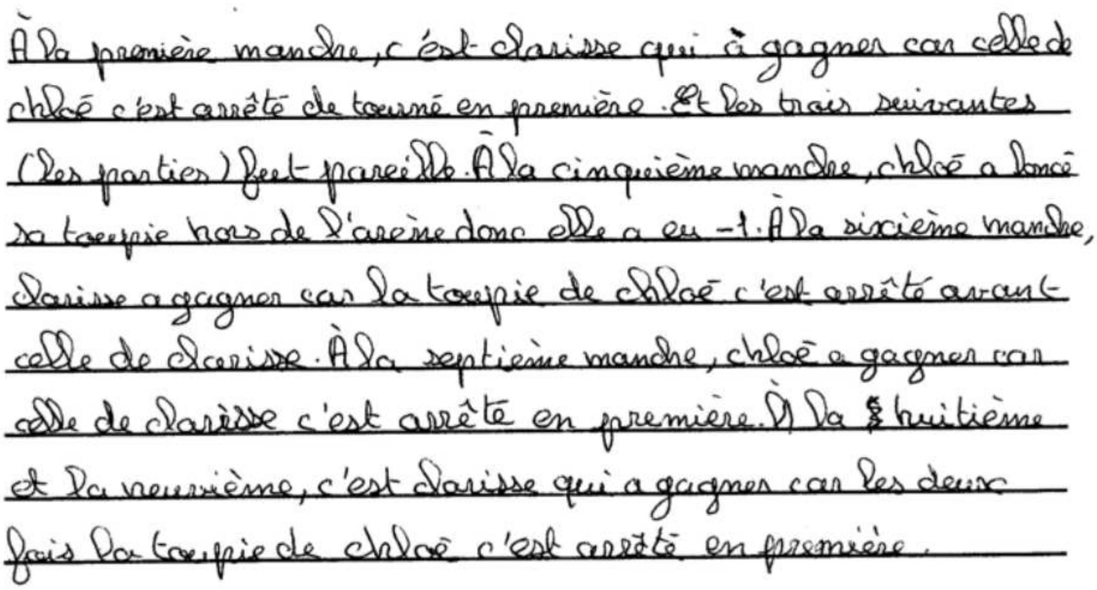

À la première manche, c'est clarisse qui à gagner car celle de
chloé c'est arrêté de tourné en première. Et les trois suivantes
(les parties) fut pareille. À la cinquième manche, chloé a lancé
sa toupie hors de l'arène donc elle a eu -1. À la sixième manche,
clarisse a gagner car la toupie de chloé c'est arrêté avant
celle de clarisse. À la septième manche, chloé a gagner car
celle de clarisse c'est arrête en première. À la ~~8~~ huitième
et la neuvième, c'est clarisse qui a gagner car les deux
fois la toupie de chloé c'est arrêté en première.

FIGURE 4.2 – Exemple de récit descriptif

Inscrire le récit dans le milieu didactique

Dans notre travail, nous n'avons pas pour objectif de proposer une forme alternative pour la formulation des mathématiques. Il ne s'agit pas de seulement considérer le récit en tant que support mais plutôt en tant que véritable outil permettant de mettre en jeu des processus de problématisation [4]. Pour parvenir à cet objectif, il a été nécessaire d'inscrire le récit dans le milieu didactique. Nous avons donc construit notre milieu comme lieu d'interaction entre les aspects mathématiques et les aspects relatifs au récit. La situation a été élaborée de manière à ce que la structure mathématico-logique sous-tendue par cette dernière se construise et se révèle aux élèves au travers de la logique du récit. Inversement,

3. Nous présentons le jeu dans le chapitre 9 de la partie III

4. Le terme problématisation est ici considéré dans le sens le plus large qui inclut tout processus relatif à la résolution d'un problème.

la construction d'un récit est soumise au respect de règles mathématiques et à la prise en charge des propriétés mathématiques des objets en jeu. La logique du récit et celle de la situation mathématique peuvent être mises en tension par les élèves. Nous proposons ci-dessous trois exemples d'interactions relatifs à différentes questions de recherche.

Résolution d'un problème via la construction d'un récit d'anticipation

Une de nos ambitions est de déterminer les apports du récit dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes. Nous avons donc cherché un moyen d'imposer le récit aux élèves en l'intégrant dans une situation problématique. La manière que nous avons retenue consistait à proposer aux élèves un extrait de récit et à leur demander de le compléter pour atteindre un objectif fixé par nos soins. L'extrait en question relatait une partie non terminée du jeu de toupies (dont nous avons parlé dans le point précédent) et constituait l'état intial de la situation. Sous couvert d'une sorte de rédaction, les élèves devaient en fait résoudre un problème additif [5] et déterminer la transformation permettant d'atteindre l'état final demandé par la consigne connaissant l'état intial.

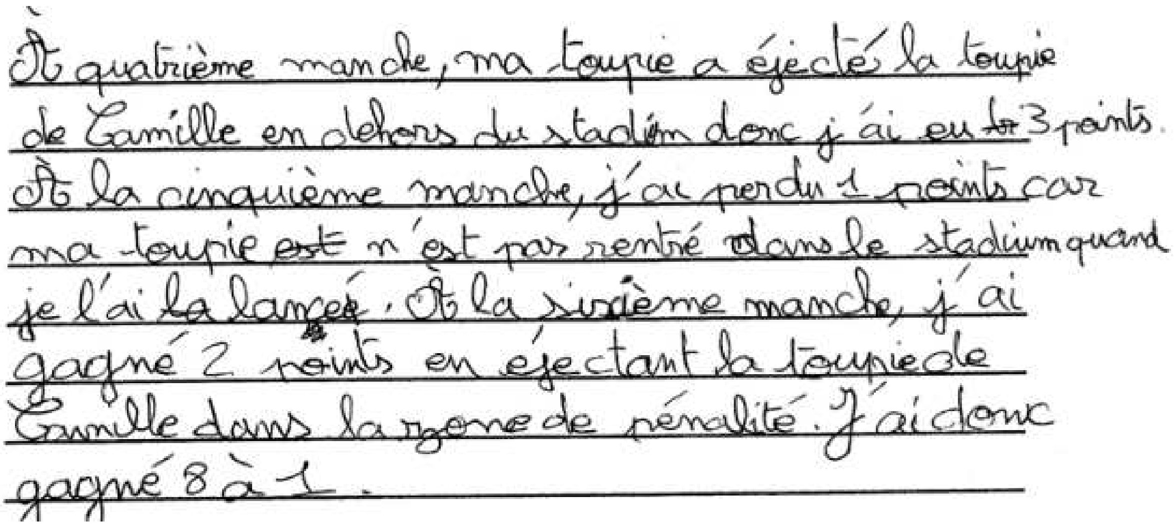

À quatrième manche, ma toupie a éjecté la toupie de Camille en dehors du stadium donc j'ai eu ~~10~~ 3 points. À la cinquième manche, j'ai perdu 1 points car ma toupie ~~est~~ n'est pas rentré dans le stadium quand je l'ai ~~la~~ lancée. À la sixième manche, j'ai gagné 2 points en éjectant la toupie de Camille dans la zone de pénalité. J'ai donc gagné 8 à 1.

FIGURE 4.3 – Récit d'anticipation construit pour résoudre un problème additif.

Contrairement à l'extrait présenté en figure 4.2, le récit reproduit ici est un récit d'anticipation, cette partie n'a jamais réellement eu lieu. L'élève a construit ce récit, en s'appuyant sur sa connaissance de la situation et sans faire référence à une partie effectivement réalisée. La construction du récit et celle du raisonnement permettant la résolution du problème sont alors intimement liées, et ce, à plusieurs niveaux [6].

5. Problème additif de transformation d'état selon la classification de Vergnaud (1986).
6. Nous explicitons ces niveaux d'interaction dans les parties II, III de ce document.

Construction d'un raisonnement convoquant à la fois des contraintes relatives au récit et aux mathématiques

La possibilité pour l'élève de circuler entre deux espaces – celui relatif au récit et celui relatif aux mathématiques – était au cœur de nos préoccupations. Pour que l'élève soit en mesure d'effectuer ce transfert, il a fallu mettre en place des contraintes qui soient liées à chacun des ces domaines et qui puissent interagir. Nous avons donc construit un milieu didactique dans lequel une mise en tension des contraintes rhétoriques et des contraintes mathématiques portées par les objets en jeu peut s'opérer.

L'extrait ci-dessous illustre bien les répercussions de la confrontation des deux logiques. Le problème proposé à l'élève consistait en un problème de composition de transformations relative à une partie de jeu de toupies. Dans celui-ci la transformation partielle recherchée était négative, une perte de deux points. L'autre transformation partielle était un gain de cinq points pour une transformation totale correspondant à un gain de trois points. Lors de la correction de ce problème, l'élève explique à l'oral le raisonnement qu'il a effectué : *Bah au début, moi je pensais que ça allait être en une manche, que ça allait être en fait ... puisque en tout on disait qu'elle [gagnait] trois points. Puisque elle en avait cinq au début. Et ensuite elle en avait trois, elle perd deux points donc. Et puisque y a pas dans la règle moins deux points, y a que moins un ou moins trois (...) Donc ensuite moi j'ai dit qu'il fallait faire en deux manches, deux fois en tirant à coté du stadium come ça, ça fait moins deux.*

On voit dans cet extrait que les deux logiques s'entrecroisent dans le raisonnement de l'élève. Il débute par une remarque inhérente à l'évaluation du nombre de manches permettant de réaliser la transformation : *"Bah au début, moi je pensais que ça allait être en une manche, que ça allait être en fait"*. C'est le récit qui contraint l'élève à déterminer ce nombre de manches. En effet, construire une succession d'évènements (nécessaire à la construction d'un récit) impose au rédacteur de fixer le nombre d'évènements (et donc de manches) à raconter. L'élève enchaîne en expliquant le calcul qui lui a permis de déterminer la valeur de la transformation : *"puisque en tout on disait qu'elle [gagnait] trois points. Puisque elle en avait cinq au début. Et ensuite elle en avait trois, elle perd deux points donc"*. Il revient ensuite sur le récit via une analyse des règles du jeu : *" Donc ensuite moi j'ai dit qu'il fallait faire en deux manches, deux fois en tirant à coté du stadium come ça, ça fait moins deux"*. Il justifie ainsi les choix qu'il a effectué pour caractériser entièrement le déroulement de la transformation. Le raisonnement de l'élève s'inscrit bien dans les deux domaines (récit et mathématiques) ce qui lui permet de prendre en compte toutes les contraintes en jeu dans la situation.

Construction de preuves et émission de conjectures grâce à la convocation et à la construction de récits

Un autre aspect de notre recherche présenté ici concerne l'intégration du récit en tant qu'objet dans la construction de preuve. Une fois construit, un récit est un objet auquel il est facilement possible de faire référence. Nous avons donc imaginé qu'il pouvait être considéré comme un objet concret par les élèves, utilisable lors de la preuve d'un résultat.

Nous avons donc mis en place des moments de débat oraux durant lesquels les élèves devaient expliquer et justifier leurs résultats. Lors de ces débats, les élèves ont effectivement convoqué les récits – que ce soient des récits descriptifs ou des récits d'anticipation – en tant qu'exemple ou contre-exemple.

Dans l'extrait ci-dessous, les élèves débattent à propos du nombre maximum de manches qu'il est possible de jouer dans une partie. Les justifications qu'ils proposent s'appuient sur des arguments mathématiques mais également, et c'est ce qui nous intéresse ici, sur des arguments relatifs au récit.

- *Enseignante : Est ce qu'on pourrait un nombre maximum de manches. Merci ! Aurore ?*
- *Aurore : Bah y a pas de maximum puisqu'on peut gagner à n'importe quelle manche ou on peut perdre à n'importe quelle manche.*
- *Coralie : Ça dépend de la taille de la feuille aussi.*
- ***Simon : Non ça dépend des personnes (...) Ça dépend des personnes parce que les personnes ils tirent pas pareil, parfois euh ... en trois manches ils ont déjà gagné. Y en a d'autres qui font onze manches, d'autres qui font en six manches euh ... mais y a pas de maximum.***
- *Enseignante : Donc on rejoint l'idée de Ludovic en même temps que la tienne. Vu qu'on peut perdre beaucoup de points on peut mettre plus de temps pour arriver à sept.*
- *Simon : Y a pas de maximum.*
- *Enseignant : Et donc bah comme ça on ne peut pas définir de maximum. D'accord ?*
- *Martin : Maitresse, il peut y en avoir douze milliard et tout ça (...).*
- *Enseignante : Il faudrait à chaque fois que les deux personnes perdent. Martin vas-y.*
- *Martin : Bah par exemple je sais pas moi. Euh ... Liam contre Jayson par exemple. Bah Jayson il gagne puis Jayson il perd, Jayson il gagne, Jayson il perd, Jayson il gagne, Jayson il perd. Donc tu vois bah après ça fait comme ça (Il mime une oscillation).*

Les arguments avancés par Simon et Martin ne reposent pas uniquement sur une structure mathématique. Les deux élèves construisent un récit de partie. On peut d'ailleurs remarquer que Martin ne met absolument pas en évidence la suite de score sous-jacente au récit qu'il propose. Il prouve à ses camarades qu'il est possible de réaliser une partie qui ne se termine pas grâce à une argumentation basée sur un récit et qui n'intègre pas d'objet mathématique.

Nous approfondirons ces différentes interactions dans le texte de notre document de thèse. En proposant des extraits de productions d'élèves nous avons souhaité donner à nos lecteurs quelques points de repères pour la suite de leur lecture.

Conclusion : Principes d'une approche par le récit

Le travail réalisé dans cette première partie nous permet de mettre en place les principes de l'approche que nous développons dans la suite de notre thèse.

En investissant à notre manière la méthodologie proposée par Castela, nous avons pu construire un *curriculum praxique* de la résolution de problèmes à l'école primaire. La définition de celui-ci nous a également amenés à souligner que certaines nécessités d'apprentissage ne sont pas explicitées par les instructions officielles et ne sont donc pas, *a priori*, prises en charge par l'institution scolaire. En tant que didacticiens, nous nous interrogeons sur les effets potentiels d'une telle absence dans le parcours scolaire des élèves. Le paradigme du (socio-)constructivisme dans lequel nous évoluons place la résolution de problèmes comme une nécessité pour l'apprentissage. Il nous semble donc que cette non prise en charge ne peut être qu'un frein aux ambitions pédagogiques de l'institution scolaire telles qu'elles sont affichées par les instructions officielles. Ces dernières soulignent en effet l'importance de cette activité dans la construction des savoirs. Elles insistent également sur la difficulté pour les élèves d'appréhender sa pratique mais ne proposent pas réellement de pistes pour la formation des élèves.

La mise en évidence de ce paradoxe nous a amenés à procéder à une analyse exploratoire d'un corpus de manuels scolaires. Cette étude nous a permis de mettre en évidence les difficultés inhérentes à la construction d'un apprentissage qui ne dénature pas l'activité de résolution et ne prenne pas à sa charge tous les aspects mathématiques du problème. En réponse à ces constats nous proposons d'**inscrire du récit dans le milieu didactique, en tant qu'élément antagoniste de l'élève mais aussi en tant que support pour la construction de raisonnement dans le milieu didactique.**

Nous avons illustré, dans le chapitre 4 de cette première partie, les caractéristiques de cette approche construite puis mise à l'épreuve dans notre travail de thèse. Dans la suite de notre document de thèse, nous développons notre recherche d'un point de vue théorique (Partie II) puis expérimental (Partie III).

Deuxième partie

Modélisations théoriques des interactions entre construction de récit et résolution de problèmes en mathématiques : Fonctions du récit et caractéristiques d'un milieu didactique intégrant le récit

Dans cette seconde partie nous développons les aspects théoriques de notre travail de thèse. Nous débutons par la construction, dans les chapitres 5 et 6, d'une modélisation symétrique du *problème* et du *récit*. L'originalité de ces modélisations repose sur la prise en charge à la fois de l'objet matériel – l'énoncé en quelque sorte – mais aussi le traitement de cet objet ; la construction et la résolution du problème au travers du raisonnement et, pour le récit, la construction et la résolution de l'intrigue via la narration. Cette mise en parallèle nous permet de souligner les caractéristiques communes aux deux activités. Nous insistons en particulier sur la mise en place, dans les deux cas de processus structurants, problématisants et explicatifs. Nous insistons sur cet aspect dans le cadre de la construction d'un récit au travers de la définition, dans le chapitre 7, de *fonctions du récit*. Notre objectif est d'anticiper les interactions possibles entre des pratiques et des opérations liées au récit et des pratiques et des opérations liées à la résolution de problèmes de mathématiques. Pour cela, nous nous intéressons aux rôles que peut jouer le récit dans les apprentissages en croisant pour cela différents travaux :

– **Des travaux sur les fonctions du récit** comme ceux de Paul Ricœur (1983, 1984, 1985, 1986) et Jerome Bruner (2003, 2005, 2006, 2008). Ces trois auteurs mettent en avant des caractéristiques structurelles et structurantes du récit. Ils prêtent ainsi au récit des fonctions dans les apprentissages au niveau de la problématisation, de l'explication, de la modélisation ou encore de la représentation. Nous nous intéresserons également aux rôles du lecteur et du rédacteur, grâce aux travaux d'Umberto Eco (1985, 1996) et Catherine Tauveron (2003) pour situer ces fonctions par rapport à la compréhension et/ou la production de récit.

– **Des recherches sur les interactions entre Sciences et Récits qui s'intéressent aux apprentissages scientifiques et à la problématisation**. Nous pouvons citer à ce sujet les travaux de Bruguière et Héraud (2007) et Bruguière et Triquet (2012) qui étudient plus particulièrement les apports de récits tirés de la littérature de jeunesse dans les apprentissages en sciences expérimentales. Nous proposons également les travaux de Orange-Ravachol et Triquet (2007) qui examinent la part de récit dans les explications des élèves ; les travaux de Triquet (2007) ou Lhoste et al. (2011) qui s'intéressent aux apports de la construction de récits dans l'appropriation des savoirs scientifiques.

Ce travaux nous permettent de mettre en évidence les fonctions problématisantes et structurantes du récit. Ainsi, nous construisons dans le chapitre 8 différents modèles d'interaction entre l'activité de résolution de problèmes et de construction de récit. Grâce aux travaux de Scardamalia et Bereiter (1987, 1998), nous pouvons mettre en relation, du point de vue des processus et des connaissances, deux espaces problèmes :

– l'espace du contenu relatif aux savoirs disciplinaires et donc, dans notre cas, au problème de mathématiques ;
– l'espace rhétorique, inhérent à la construction d'un texte et d'un récit.

Les deux auteurs font en effet le postulat que lors de la rédaction d'un texte, il existe des interactions entre les deux espaces qui conduisent à la mise en jeu de fonctions cognitives élevées et à une transformation des connaissances en jeu dans les deux domaines.

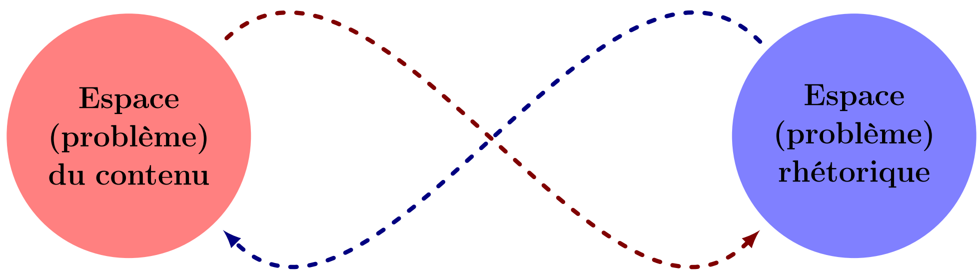


FIGURE 4.4 – Interaction de deux espaces problèmes

Cette seconde partie nous amène à formuler les hypothèses suivantes :

- **Sous certaines conditions que nous déterminons, l'introduction du récit dans une situation problématique amène une interaction entre la narration (comme activité de production de récit) et la construction d'un raisonnement.**

- **À un premier niveau, l'élaboration d'un récit visant à répondre à la situation problématique peut être un élément déclencheur et structurant du raisonnement. Autrement dit, le récit est un outil problématisant et permet également de produire une argumentation en vue de justifier la solution trouvée**.

- **À un second niveau, les interactions entre les deux espaces problèmes en place (espace rhétorique et espace du contenu) permettent une mobilisation et une transformation des savoirs en jeu en résolution de problèmes du point de vue des notions mathématiques comme des compétences plus transversales liées au raisonnement.**

Chapitre 5

Caractérisation de la résolution de problèmes de mathématiques

Notre objectif est d'en proposer une modélisation qui soit opératoire pour caractériser les interactions qui se jouent avec des activités relatives au récit. Par conséquent, nous la considérons à la manière de Pólya en tant qu'activité heuristique.

Nous débutons ce chapitre par une définition de l'objet problème au travers de différentes composantes qui entrent en jeu, selon nous, dans l'activité de résolution de problèmes (Section 5.1). Nous proposons ensuite une caractérisation de l'activité de résolution de problème qui repose sur une "satellisation" des processus de résolution autour de ces composantes. Autrement dit, sans proposer de hiérarchie ou de chronologie entre les différents processus qui vont entrer en jeu, nous les associons de manière privilégiée avec une composante particulière de l'objet problème. Cette disposition autour de composantes nous permet de distinguer les processus structurants, des processus d'élaboration et des processus explicatifs selon leurs relations aux differentes composantes [1]. Nous procédons pour cela en deux temps. Nous nous concentrons tout d'abord sur l'activité de résolution experte, telle qu'elle est pratiquée par les mathématiciens (Section 5.2). Nous adaptons ensuite ce modèle à celle que l'on peut raisonnablement attendre d'un élève d'école primaire (Section 5.3). Si nous nous intéressons à l'activité du chercheur en mathématique c'est à cause de l'intention affichée des programmes scolaires [2] : la résolution de problèmes est l'unique activité qui peut, et doit, donner aux élèves la vision de la "véritable activité mathématique". L'activité proposée aux élèves serait alors une sorte de tansposition didactique (Chevallard, 1999, 2002) d'une pratique et d'un savoir-faire du chercheur en mathématiques.

1. Cette distinction fait écho aux fonctions principales du récit dans la construction des connaissances – la structuration, la problématisation et l'explication – que nous nous définissons dans le chapitre 7.
2. Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août (2008), Bulletin officiel hors-série n° 3 du 19 juin (2008)

5.1 Composantes de l'objet problème

Il existe plusieurs manières de définir l'objet *problème de mathématiques*. Selon l'approche, il est possible de l'aborder par son contenu (relation à un objet ou un concept mathématique), l'objectif pédagogique qui lui est liée (le problème peut être un moyen, un mobile ou un critère d'apprentissage par exemple) etc. Dans notre travail, nous choisissons de procéder à une étude systémique en considérant le problème comme une organisation de composantes. C'est ce choix qui nous permettra dans la suite de considérer l'objet *problème* dans son interaction avec l'activité de résolution comme le propose la définition de Brun :

> *"Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème, dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire."* (Brun, 1990)

Cette définition présente deux composantes de l'objet *problème de mathématiques* : une situation initiale et un but que nous représentons dans la figure 5.1 ci-contre. L'activité de résolution de problème est alors vue comme la construction d'une suite d'actions et d'opérations[3] permettant de passer de la première composante à la seconde. Nous complétons cette définition en précisant deux points qui nous semblent essentiels. Le premier est que l'élaboration de cette suite d'actions ou d'opérations est inhérente à la construction d'un raisonnement. La seconde est l'introduction de l'aspect mathématique. Pour qu'un problème soit effectivement un problème de mathématiques, il faut que la situation, les questions et le raisonnement mettent en jeu des objets ou des concepts mathématiques.

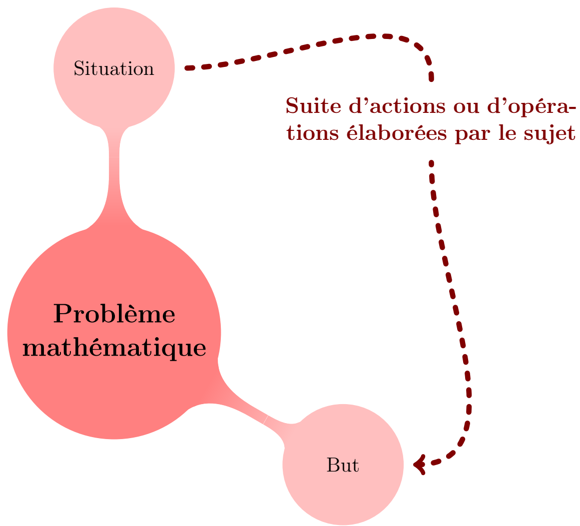


FIGURE 5.1 – Composantes du problème inspirées par la définition de Brun

3. Nous définissons l'action comme ... et l'opération ...

Par conséquent, nous proposons de modifier la définition de Brun en regroupant, sous la dénomination *problème de mathématiques*, toutes les situations mettant en jeu un objet mathématique et s'actualisant au travers d'une (ou plusieurs) question(s) à laquelle (auxquelles) il n'est possible de répondre qu'après élaboration d'un raisonnement [4].

Nous modifions donc la structure en deux composantes présentée dans la figure 5.1 de deux manières. Nous décomposons le *but* en deux composantes :

- **La (les) question(s),** qui est (sont) généralement explicite(s) dans le cas d'un problème scolaire. Elle(s) est (sont) en quelque sorte l'origine du but tel qu'il est entendu par Brun.

- **La (les) solution(s)**, lorsqu'elle(s) existe(nt), qui est (sont) à déterminer et qui est (sont) la réponse au problème posé. Sa détermination clôt la suite d'actions.

La composante *situation* repose, quant à elle, sur la donnée d'*informations* (mathématiques ou non telles que des valeurs, des relations, etc.) organisées les unes par rapport aux autres au travers d'une structure. À noter que certaines des relations entre les différentes informations peuvent être inconnues. Lors de la résolution du problème il faut prendre en compte ces informations ainsi que la manière dont elles sont structurées. Nous remplaçons donc la *situation de Brun* par une composante "double" : **structure et informations.** Chacune des trois composantes que nous avons déterminées met en jeu un objet ou concept mathématique (Figure 5.2, p. 92), nous . Nous parvenons donc à la définition suivante qui restera celle à laquelle nous ferons référence tout au long de notre thèse :

> **Problème de mathématiques :**
> Un problème est une **structure** composée d'**informations** reliées entre elles et qui définissent une situation. Cette situation pose une **question** (ou plusieurs questions) dont il est possible de trouver la **solution** uniquement après élaboration d'un raisonnement qui prend en charge des objets mathématiques (Figure 5.2).

La résolution de problème est alors le processus permettant d'élaborer les actions nécessaires pour déterminer la (les) solution(s), lorsqu'elles existent. Cette élaboration d'actions repose sur la construction d'un raisonnement. Nous la caractérisons dans les deux prochaines sections, tout d'abord du point de vue du chercheur expert puis du point de vue de l'élève.

4. La résolution de problèmes serait alors le processus permettant d'élaborer les actions nécessaires pour déterminer la (les) solution(s) via la construction d'un raisonnement prenant en charge cet objet mathématique.

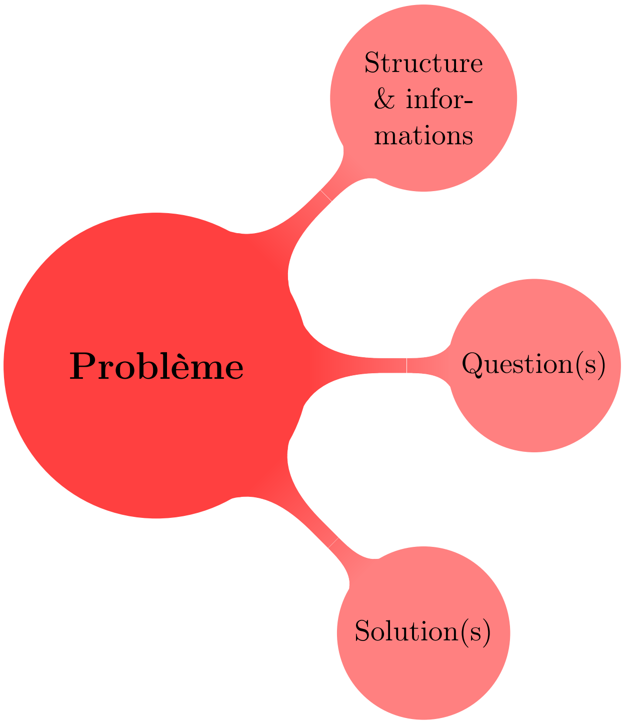


FIGURE 5.2 – Composantes de l'objet problème

5.2 Processus de résolution de problèmes dans l'activité du chercheur

Envisager la résolution de problèmes comme un processus générique, d'une certaine manière indépendamment du problème en jeu, pose la question des compétences transversales [5]. Ce sont à ces processus, indépendants des particularités individuelles des problèmes, que nous nous intéressons ici. Il est tentant – comme peut le faire penser la défintion de Brun en parlant d'une *suite d'actions* – de considérer la résolution de problèmes comme une activité linéaire. Cette réduction, qui nous le verrons, n'est pas représentative de l'activité de résolution de problèmes, nous permet néanmoins de mettre en évidence différentes natures de processus en jeu.

5. Voir à ce sujet l'ouvrage de B.Rey, M.Develay, *Les compétences transversales en question* paru en 1996

5.2.1 Découpage en phases de la résolution de problèmes pour déterminer différentes natures de processus

Le mathématicien Pólya est le premier à construire une méthodologie générale de la résolution de problèmes. Il propose dans *How to solve it*, traduit sous le titre *Comment poser et résoudre un problème* (Pólya, 1945, 1994) quatre étapes dans la résolution d'un problème :

1. Comprendre le problème ;
2. Concevoir un plan ;
3. Mettre le plan à exécution ;
4. Examiner la solution obtenue.

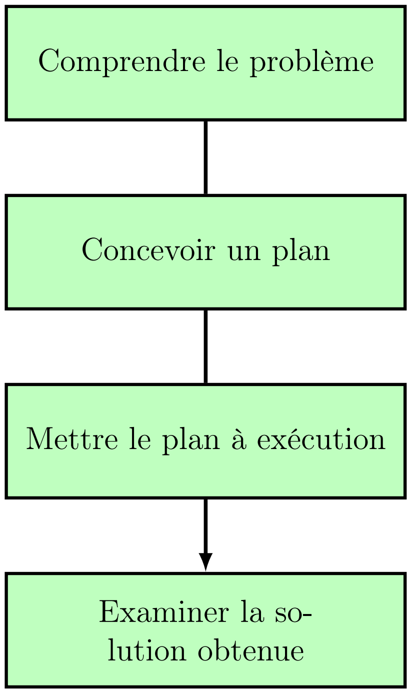


FIGURE 5.3 – Phases de la résolution de problèmes selon Polya

Cette modélisation décompose la résolution de problèmes en orientant chaque étape vers un objectif précis qui devient la base de l'étape suivante. Une fois le problème compris – c'est à dire selon l'auteur une fois l'inconnue et ses relations avec les données déterminées – il est possible de concevoir un plan. Une fois le plan construit, il faut le mettre à exécution. Enfin on vérifie que la solution obtenue est valable. Ainsi, on voit clairement que les processus envisagés par Pólya sont de différentes natures. L'exécution du plan impose de mettre en jeu des processus *a priori* plus mécaniques tels que le calcul ou la mesure. La compréhension du problème repose sur des processus structurants, qui permettent de mettre en relation des informations. La conception du plan impose des processus d'élaboration et de construction d'explications et des processus logiques (processus déductifs, inductifs, etc.). On peut également imaginer la mise en place de processus argumentatifs lors de l'examen de la solution.

Les termes employés par Pólya pour étiquetter ses phases ne font ressortir ni l'aspect mathématique, ni la manière dont est énoncé le problème. On peut imaginer que l'auteur en cherchant à proposer une méthode universelle met de côté certains aspects spécifiques à l'originalité de chaque problème. L'énoncé, qui peut prendre de multiples formes, ainsi que les objets mathématiques en jeu en font partie.

Pour introduire ces éléments, inclus dans notre définition du problème, nous avons choisi de nous intéresser aux travaux de Descaves. Il propose un modèle composé de trois étapes (Descaves, 1992) :

1. Comprendre l'énoncé et construire une représentation ;
2. Mathématiser et mettre en signes l'énoncé ;
3. Mettre en œuvre des stratégies et des procédures de résolution."

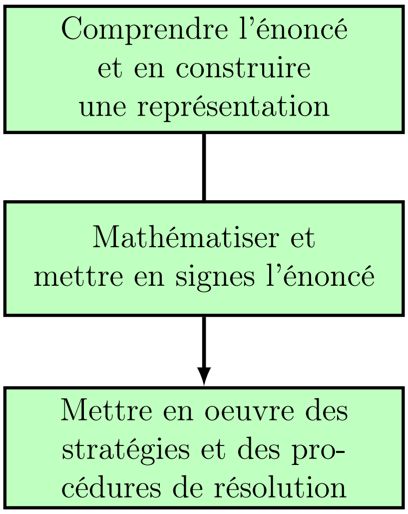


FIGURE 5.4 – Phases de la résolution de problèmes selon Descaves

Cette modélisation affiche bien les deux éléments qui nous souhaitions introduire : l'énoncé et les mathématiques. Il est important pour nous de prendre en compte l'énoncé dans la construction de notre modélisation. En effet en milieu scolaire, les problèmes sont généralement présentés aux élèves grâce à un énoncé qu'il soit sous forme de texte, d'image, de tableau ou autre. L'énoncé propose aux élèves une description, plus ou moins complète et complexe de la situation. Il fournit des informations, structurées par divers types de relations (chronologiques, cause / conséquence, mesure mathématiques, etc.). La seconde phase *mathématiser et mettre en signes l'énoncé*, tout comme la première avec la *construction de la représentation*, prennent en compte cet énoncé et amènent également des processus de modélisation.

D'une manière plus générale, on peut extraire de ces modélisations différentes natures de processus. L'activité de résolution de problème articule des processus qui peuvent être successivement ou simultanément calculatoires, structurants, élaborants, explicatifs, logiques, argumentatifs, modélisants. Les deux modèles, même s'ils ne comportent pas le même nombre de phases, sont organisés de la même manière. Ils débutent par des phases consacrées à la compréhension. Ensuite, il s'agit d'une élaboration d'un plan ou d'une stratégie qui est réalisée puis vérifiée. À la lecture de ces deux auteurs, il est tentant d'imaginer qu'il est possible de découper la résolution de problèmes en tâches successives (et en quelque sorte indépendantes). Cependant, comme l'indique Julo, *ni la construction de la représentation, "ni la résolution du problème en général, ne sont des processus linéaires. Il est admis au contraire, que plusieurs processus interviennent simultanément et interagissent pour faire avancer notre compréhension et notre démarche de résolution"*(1995).

Dans la suite de cette section, nous allons nous intéresser plus spécifiquement à ces processus. Notre objectif ne va pas être de les organiser en une suite linéaire, mais bien comme nous l'avons annoncé, de les associer spécifiquement à la prise en charge (ou non) d'une composante de l'objet problème.

5.2.2 Explicitation des "processus experts" en résolution de problèmes

Tout en soulignant les limites des décompositions en phases, nous avons utilisé leur présentation pour mettre en évidence les différentes natures des processus en jeu. Dans ce point, nous nous inscrivons dans une structure qui pourrait, à première vue, s'apparenter à un système en phases. Néanmoins, nous ne répartissons pas les différents processus linéairement dans un enchaînement chronologique. Nous proposons un système de cycles organisés autour de la prise en charge (ou de la non prise en charge) des différentes composantes de l'objet problème (Figure 5.2, p 92). Si une chronologie apparaît au travers de notre explicitation, elle ne sera pas l'expression de notre vision mais une conséquence des contraintes de la langue.

Nous détaillons, dans chacun des trois points suivants, un cycle de processus. Nous les organisons par nature autour des trois composantes de l'objet problème. Ces processus, que nous souhaitons représentatifs de l'activité du chercheur, ne sont pas tous laissés à la charge de l'élève en milieu scolaire.

5.2.2.1 Processus structurants et modélisants, organisés autour de la composante *Structure & informations*

La résolution d'un problème est inhérente à la construction d'une représentation de la situation sur laquelle il repose. Nous l'avons indiqué, cette situation se compose d'une structure (logique, temporelle, relationnelle, etc.) plus ou moins complexe et plus ou moins complète en informations (des mesures, des caractéristiques, etc.). Le résolveur détermine cette structure au fur et à mesure au cours de la résolution du problème. Une fois la structure déterminée, le problème peut être considéré comme résolu.

Déterminer la structure d'un problème implique de caractériser (toutes) les relations qui existent entre les objets en jeu. Certaines de ces relations sont explicites dès le début de la résolution, d'autres seront déterminées par la suite. Le résolveur doit également compléter la caractérisation de certains objets (mesure à évaluer, caractéristique inconnue, etc.). Cette détermination de la structure peut se faire à deux niveaux qui peuvent être confondus :

– Un premier niveau, que l'on peut qualifier de personnel, qui consiste avant tout en une **reformulation du problème**. Celle-ci peut prendre plusieurs formes – schéma, tableau, etc. – et peut parfois laisser de côté l'aspect mathématique du problème. Il s'agit de représenter, sous une forme appréhendable, les objets et les relations qui sont connus et/ou à déterminer. Autrement, il s'agit de représenter, non nécessairement mathématiquement, les informations et la structure du problème.

– Un second niveau, qui peut être qualifié de mathématique, car il met en jeu une **modélisation mathématique du problème**. Le résolveur doit faire un choix de représentation avec pour objectif que celui-ci soit opératoire, c'est à dire qu'il lui permette d'agir tout au long de la résolution, ou a minima temporairement. Les relations qui vont être exprimées entre les objets vont alors être mathématiques, de même que la caractérisation de ces objets.

Qu'elles soient mathématiques ou personnelles ces représentations s'établissent et se complètent tout au long de la résolution. Elles peuvent donc subir des modifications et comporter des éléments inutiles qui seront mis de côté. Elles vont mettre en jeu des informations qui sont soit explicites dès le départ, soit implicites mais accessibles par l'applications de propriétés élémentaires, soit implicites et accessibles via une construction plus complexe, un raisonnement. Il faut également noter que, comme la résolution de problèmes réalisée par un chercheur a pour objectif la construction de nouvelles connaissances, l'existence d'une solution n'est pas garantie. De fait, lorsqu'elle existe, la forme de la solution n'est pas définie *a priori*. Le choix d'un modèle mathématique peut par conséquent être un frein ou une aide. Nous y reviendrons dans le point suivant.

Les processus qui entrent en jeu dans la détermination de la structure et la caractérisation des objets sont donc pour partie des **processus structurants**. On peut par exemple penser au tri d'informations numériques par nature (en fonction de l'unité associée) ou encore par valeur (plus grand ou plus petit). Dans un autre domaine on peut imaginer une structuration spatiale entre différents objets géométriques (point d'intersection, parallèle, perpendiculaire, position dans un repère, etc.), ou encore une structuration temporelle, cause / conséquence ou toute autre relation logique. Au-delà de repérer ces informations sur les objets et leurs relations, il est nécessaire pour résoudre un problème d'être capable de les classer selon divers critères et de les structurer. Les **processus de modélisation** vont alors s'associer aux processus structurants dans la construction d'une représentation de la situation. Ils peuvent permettre de situer le problème dans un domaine des mathématiques. Pour les mettre en jeu, le chercheur peut se baser sur ses connaissances relatives à la situation étudiée, à d'autres situations et à son rapport aux objets mathématiques qu'il repère. On a donc un jeu de processus structurants et modélisants qui s'établit autour de la composante *Structure & informations* du problème (Figure 5.5).

Nous avons représenté de manière forte les processus structurants et modélisants autour de la composante *Structure & informations*. Cependant, il est évident que la modélisation va être influencée par les contraintes apportées par les deux autres composantes. Une fois déterminée, la forme de la solution peut inciter le résolveur à choisir entre deux modélisations possibles. Nous avons donc représenté, en pointillés les interactions de ces processus avec les autres composantes.

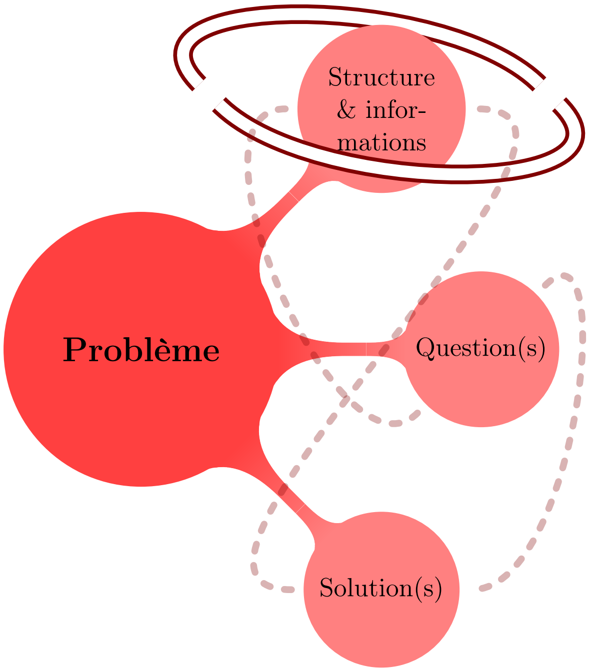


FIGURE 5.5 – Processus structurants et modélisants

5.2.2.2 Processus d'élaboration et de problématisation de la composante *Question(s)*

La question posée par le problème, ou plutôt la question qui pose le problème nécessite une réponse. Une fois celle-ci déterminée, le problème est résolu. De par la définition même de l'objet *problème*, la réponse cherchée n'est pas accessible immédiatement et doit être construite ou atteinte, via l'élaboration d'un raisonnement. Le chercheur doit donc élaborer ce que Pólya appelle un plan.

Dans le cas d'un problème simple, ce plan peut être composé d'une unique étape (ce sera parfois le cas en milieu scolaire). Cependant, dans la majeure partie des cas, le plan construit par le chercheur va comporter plusieurs étapes, correspondant chacune à un sous-problème. Ces sous-problèmes apparaissent au cours de la résolution comme des "manques" ou des "inconnu(e)s" dans la détermination de la composante *Structure & informations*. Nous l'avons indiqué dans le point précédent (5.2.2.1), la détermination complète des caractéristiques de la situation est équivalente à la résolution du problème (p. 95). Dans cet objectif, le chercheur doit anticiper sur la production d'une information, sur la nature d'une relation en **faisant des conjectures**. À partir d'informations connues ou construites, le chercheur met en place des **processus d'élaboration d'explications** qui lui permettent d'en produire de nouvelles. Il utilise pour cela les outils disponibles dans le modèle mathématique qu'il a choisi [6].

6. Le choix d'un domaine des mathématiques (analyse, géométrie, algèbre, etc.) pour inscrire le problème permet au chercheur de disposer d'outil et de modes de raisonnements qui lui sont propres.

Ces anticipations sont en fait l'essence du raisonnement à produire. L'articulation de ces anticipations via la prise en compte de sous-problèmes permet au chercheur d'élaborer son raisonnement. Lorsque le chercheur ne dispose pas d'un modèle de résolution, le chercheur prospecte, produit et résoud chaque sous-problème. Les résultats obtenus permettent d'enrichir la connaissance de la structure. Dans ce cas le raisonnement est produit pas à pas, par une procédure parfois qualifiée de *ad-hoc*. Lorsqu'il dispose d'une méthode de résolution, le chercheur envisage la succession des sous-problèmes dans son intégralité avant de les résoudre un par un. Même dans le cadre d'une démarche experte, la construction du raisonnement est rarement linéaire. Elle peut comprendre des fausses pistes, des retours en arrière en cas de conjecture erronée. Le chercheur peut à tout moment réorganiser les informations dont il dispose et changer de modélisation. C'est dans l'interaction avec les deux autres composantes – *Structure & informations* et *Solution* – que la validité du raisonnement est contrôlée.

Tous les processus de problématisation que nous venons de décrire, s'organisent principalement autour de la question du problème (Figure 5.6). Ils interagissent également, tout comme les processus structurants et modélisants, avec les autres composantes.

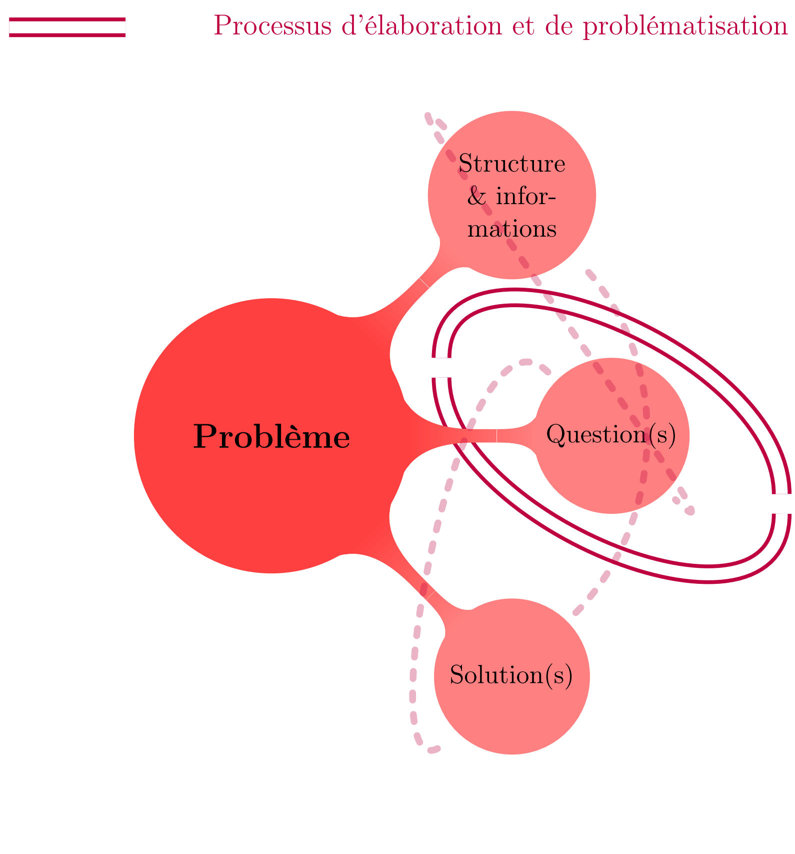


FIGURE 5.6 – Processus d'élaboration et de problématisation

5.2.2.3 Processus explicatifs, calculatoires et argumentatifs *Solution(s)*

Dans la résolution de problèmes, le chercheur peut mettre en place deux types de processus autour de la composante *Solution(s)*. Ceux du premier type ont pour objectif de produire, au sens propre, des nouvelles informations. Il peut s'agir de tâches mécaniques comme **l'application d'un algorithme**, **la résolution d'une équation**, ou **un calcul**. Ces **processus calculatoires** permettent de produire des mesures et des relations qui complètent la détermination de la situation, et au final permettent d'accéder à la solution du problème. Celui-ci est alors résolu. Chaque résultat produit par ces processus calculatoires est réintroduit dans les deux autres composantes, directement dans la détermination de la situation ou comme base pour de nouvelles conjectures.

La solution produite, ainsi que les résultats intermédiaires obtenus, se doivent, pour être validés, d'être articulés dans un ensemble logique cohérent. Le chercheur utilise des **processus argumentatifs** pour exposer et prouver la validité de sa solution. Qu'elles soient numériques, géométriques, relationnelles ou autre, toutes les productions doivent être **conformes aux contraintes de la situation** et du domaine mathématique en jeu. Il s'agit pour le chercheur d'**établir la preuve de l'exactitude de sa démarche et de son résultat**. Ce travail peut se faire pendant le temps de la résolution ou *a posteriori.* Les fausses pistes produites lors du raisonnement sont alors éliminées et la démarche épurée. Les résultats présentés dans ce cas sont alors uniquement ceux qui sont nécessaires à la détermination de la solution lorsqu'elle existe et une chronologie est créé *a posteriori* pour faciliter la lecture. Il n'y a plus de traces de la recherche.

Il se joue donc autour de la composante *Solution(s)* tout un ensemble de processus argumentatifs et calculatoires. Quelle que soit leur nature, ils interagissent principalement avec cette dernière et prennent en compte, moins fortement cependant, les deux autres composantes (Figure 5.7).

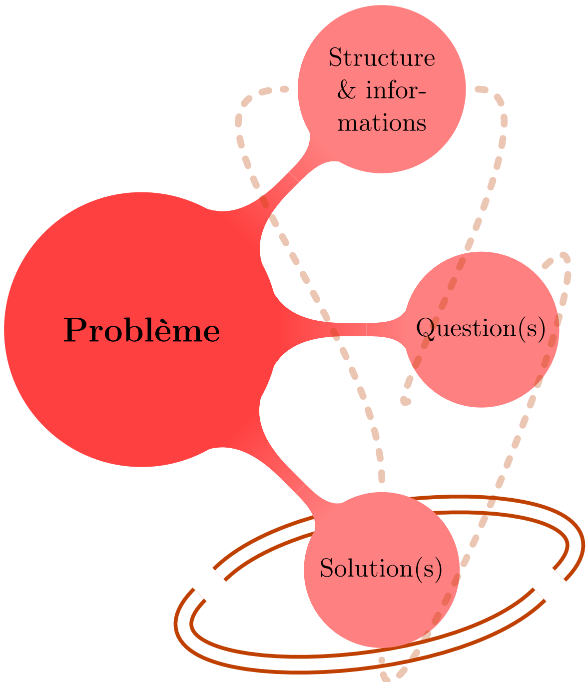


Figure 5.7 – Processus explicatifs, argumentatifs et calculatoires

5.2.2.4 Remarque sur les processus d'abstraction

Le dernier point que nous souhaitions aborder dans cette section concerne les relations entre le niveau d'abstraction et la résolution de problèmes. Les processus d'abstraction sont, avant tout, des processus de modélisation. Le choix d'un modèle mathématique d'interprétation de la situation est lié aux capacités d'abstraction. Il est fréquent d'entendre que ces dernières sont indispensables à l'activité de résolution de problèmes. Pour résoudre un problème, il serait alors nécessaire de s'extraire complètement de la situation "réelle" et de s'inscrire dans un monde purement mathématique. Le modèle extrait de *Making sense of word problems* (Verschaffel, Greer, & Corte, 2000) [7] fait apparaître une séparation forte entre les deux espaces. Le premier espace "purement" mathématique, est celui où le chercheur peut procéder à une analyse mathématique et construire de nouveaux résultats (partie droite du schéma). Le second, lié au monde réel (partie gauche du schéma) est celui où le chercheur interprète et vérifie les résultats obtenus. Selon ce modèle il ne permet pas, selon le modèle, de construire des résultats (Figure ci-après).

7. Traduit par Crahay, Fagnant, Demonty, et Lejong (2003)

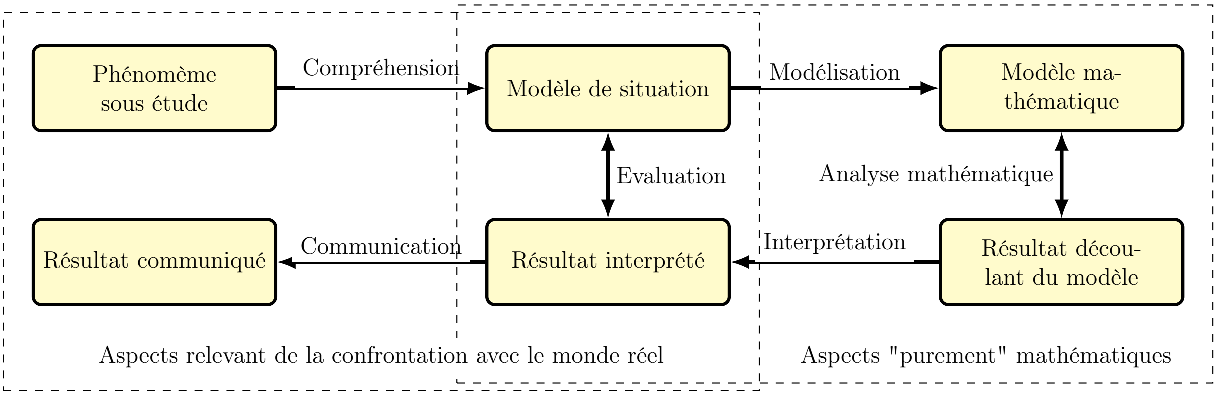


FIGURE 5.8 – Modèle du processus de modélisation mathématique
selon Varschaffel, Greer et Corte (2000)

On peut s'interroger sur la pertinence d'une distinction aussi forte entre les deux espaces. Pour un non-expert, il peut être difficile de naviguer dans un univers complètement abstrait. De plus, comme nous le montrerons au cours de notre thèse, il est possible de produire des résultats, logiquement et mathématiquement exacts, en dehors de tout modèle "purement" mathématique.

5.2.2.5 Conclusion sur les processus "experts"

Dans notre modélisation de l'activité de résolution de problèmes, nous avons cherché à faire ressortir l'imbrication des différents processus. **Chaque type de processus se réalise de manière privilégié autour d'une des trois composantes de l'objet problème. Le traitement de chaque composante permet d'obtenir un résultat équivalent à la résolution du problème** :

- **La structure complète des relations entre les différentes informations pour la composante *Structure & informations*** ;
- **Le déroulement du raisonnement permettant de conjecturer sur la nature ou la valeur de la solution pour la composante *Question(s)*** ;
- **La valeur ou la nature du résultat ainsi que la preuve de sa validité pour la composante *Solution(s)*.**

La compréhension et la résolution complète du problème, doit aboutir à un résultat dans chaque composante. Telle que nous l'avons décrite, nous l'envisageons bien comme une co-construction autour des trois composantes de l'objet problème (Figure 5.9). Une co-construction qui relève de processus mécaniques mais également, et surtout dirons-nous, heuristiques. La meilleure preuve est certainement la liste de questions élaborée par Pólya[8]. Elle constitue une sorte de guide heuristique pour la résolution de problèmes.

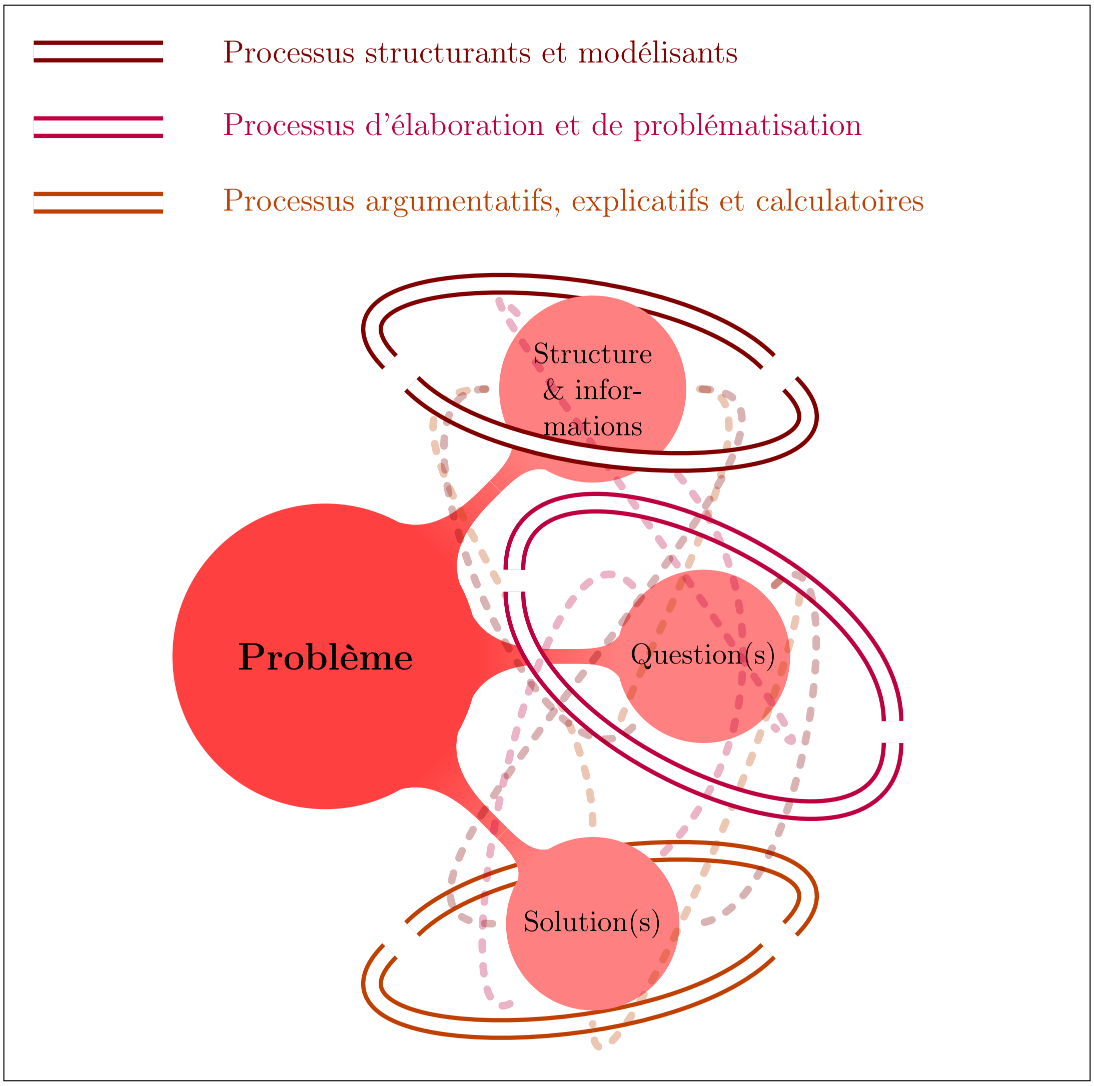


FIGURE 5.9 – Processus experts de résolution de problèmes

8. Annexe B extrait de *Comment poser et résoudre un problèmes* (Pólya, 1994).

5.3 Processus de résolution de problème (classique) dans l'activité de l'élève

Nous nous intéressons à présent à l'activité de l'élève. Dans le cadre scolaire, un problème se présente généralement confronté à un énoncé structuré. Celui-ci comporte, systématiquement, une ou plusieurs questions, traditionnellement toutes les informations nécessaires à la résolution, propose (impose) parfois un modèle mathématique et peut donner des indications sur la démarche de résolution. La présence et la constitution de cet énoncé sont la source majeure des différences entre l'activité de l'élève et celle du chercheur. Pour nous en convaincre, il suffit d'aller jetter un œuil aux travaux qui s'intéressent aux problèmes de recherche, en particulier aux *problèmes ouverts* (Arsac & Mante, 2007). Arsac et Mante insistent notamment sur la forme particulière que l'énoncé doit avoir pour placer les élèves dans des conditions similaires à celles du chercheur. En proposant ces caractéristiques nécessaires, les auteurs soulignent par opposition que les énoncés de problèmes classiques ne les possèdent généralement pas [9].

> *L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire, ni de question du type "montrez que"). (...) Il est également souhaitable qu'il y ait plusieurs procédures possibles pour atteindre le résultat et éventuellement aussi plusieurs expressions de la solution.* (Arsac & Mante, 2007, p. 21).

Selon les deux auteurs, les caractéristiques de l'énoncé ont une influence sur la démarche du résolveur. Nous explicitons dans les trois points suivants comment ces caractéristiques des problèmes classiques peuvent influer sur la prise en charge et la réalisation des différents processus de résolution.

5.3.1 Transposition des processus structurants et modélisants dans l'activité de l'élève

L'élève, tout comme le chercheur doit construire sa représentation de la situation. Cependant, il n'a généralement pas le choix du modèle mathématique. D'une part parce qu'il ne dispose pas toujours de plusieurs systèmes de représentation, d'autre part parce que l'énoncé peut imposer un registre mathématique. Soit par la présence d'un schéma ou via l'écriture par la mise en évidence d'un objet mathématique. Il s'agit alors pour l'élève de s'inscrire dans cette modélisation. Il est alors difficile de considérer que les processus modélisant sont à sa charge.

L'élève dispose avant tout des informations proposées par l'énoncé. Celles-ci étant, par tradition, suffisantes pour résoudre le problème, il n'a pas à charge de chercher d'autres sources d'informations. Il doit avant tout traiter l'information disponible pour

9. Nous préciserons ces aspects dans les chapitres 1 et 2 de cette partie lors de l'analyse des instructions officielles et d'un corpus de manuels scolaires.

en construire une représentation structurée et déterminer au maximum la valeur et la nature des objets et des relations. On peut donc envisager trois processus principaux qui participent à cette structuration :

– **Le repérage et la caractérisation des informations :** il s'agit de déterminer la nature des informations proposées par l'énoncé (indicateur temporel, valeur numérique, relation logique, etc.) ;

– **Le tri et l'organisation des informations :** il s'agit en quelque sorte de regrouper ou de dinstinguer les informations selon leur nature ou tout autre critère pertinent ;

– **La mise en relation des informations :** il s'agit de déterminer les relations, mathématiques, temporelles, logiques ou autre qui relient les informations entre elles.

Chaque production relative au traitement des autres composantes est bien évidemment intégrée, au moment ou elle est produite ou envisagée, à la structure. En cela, elle participe au traitement de la composante.

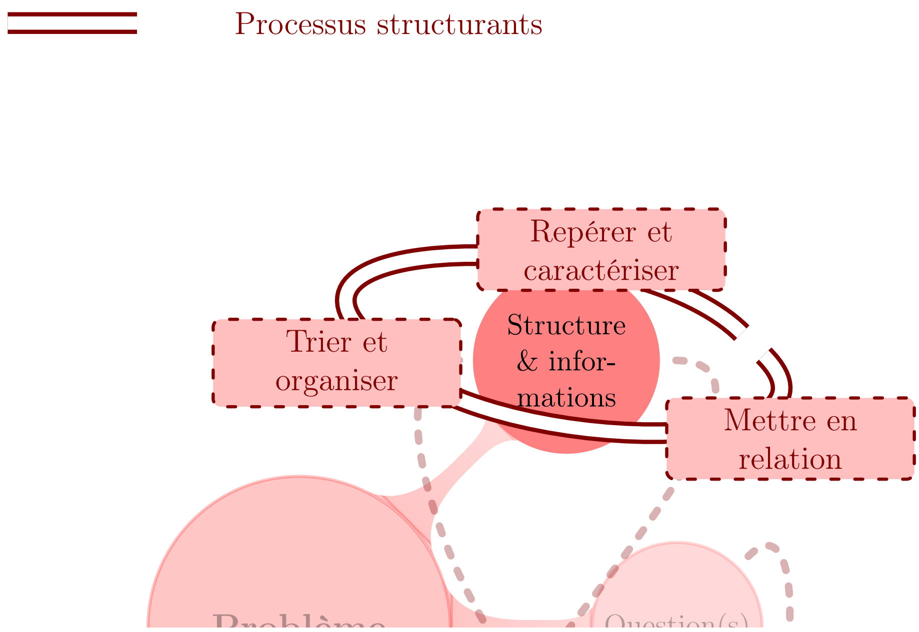


FIGURE 5.10 – Processus structurants autour de la composante *Structure & informations*

5.3.2 Transposition des processus d'élaboration, explicatives et de problématisation dans l'activité de l'élève

Traiter la question du problème, c'est en quelque sorte déterminer un sens de parcours à l'intérieur de la structure de la situation. L'élève doit mettre en relation les "manques" et les "présences", ou autrement dit, ce dont il aurait besoin pour répondre à la question et les informations dont il dispose. Les processus à solliciter dans ces moments sont principalement des processus d'élaboration d'explications et de problématisation. En parallèle, trois types peuvent principalement se mettre en place :

- **La détermination des manques :** il s'agit de considérer dans son ensemble la structure de la situation par rapport à la question posée pour repérer les inconue(s), les informations et les relations manquantes ;

- **L'association d'informations :** il ne s'agit plus seulement de déterminer des relations "simples" entre deux objets mais bien de construire à partir de ces associations, des relations plus complexes pour produire un chemin vers les "manques" ;

- **L'émission de conjectures :** il s'agit de proposer grace à une production explicative ou logique une conjecture permettant de combler le "manque" ou de l'expliquer via les associations construites.

Les trois processus participent à la construction du raisonnement et se construisent autour de la composante *Question(s)*. Il s'agit bien d'une élaboration. À partir d'informations connues l'élève essaye d'en construire de nouvelles. Chaque manque – conséquence de la question ou d'une question intermédiaire – amène la nécessité d'envisager de nouvelles associations et donc de nouvelles conjectures. Ces dernières permettent de considérer de nouveaux manques jusqu'à la détermination complète d'un parcours entre les différents éléments disponibles jusqu'à la production de réponses envisageables. Cette production de raisonnement amène une meilleure connaissance de la situation et permet de compléter le traitement autour de la composante *Structure & informations*. À son tour, le traitement de cette composante permet d'envisager, à terme, de nouvelles conjectures.

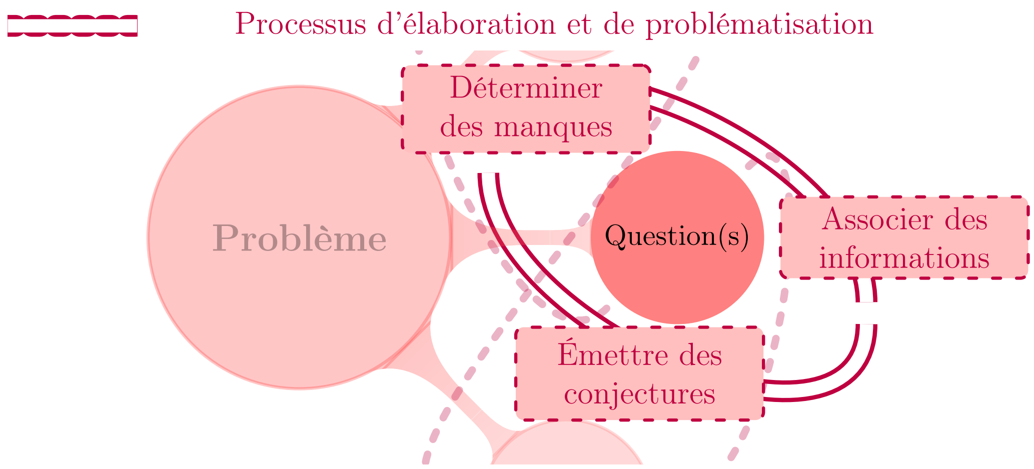


FIGURE 5.11 – Processus d'élaboration et de problématisation autour de la composante *Question(s)*

5.3.3 Transposition des processus argumentatifs, explicatifs et calculatoires dans l'activité de l'élève

Un énoncé de problème scolaire, en proposant une ou plusieurs questions, précise la solution à déterminer et par conséquent sa forme : une valeur numérique, une fonction, une propriété, etc. Ainsi, l'élève placé en résolution de problème sait par avance qu'une solution existe ainsi que son type. La composante *Solution(s)* peut donc être partiellement déterminée avant même que l'élève ne s'attaque au problème. Il doit cependant :

- **Déterminer sa valeur :** il s'agit généralement pour l'élève de mettre en place des processus calculatoires. Ceux-ci sont une application numérique des relations déterminées dans le traitement des deux autres composantes.
- **Prouver la validité de cette solution :** il s'agit de produire une argumentation attestant de la validité de la procédure utilisée, de la structure de la situation et donc de la solution.

Dans le cadre scolaire, en particulier au niveau primaire, c'est généralement l'enseignant qui valide la procédure et non l'élève lui même. La preuve de la validité peut se limiter à une vérification des calculs. Sans aller jusqu'à la production d'une preuve mathématique, on peut envisager pour l'élève la **construction d'explications** pour justifier sa solution. Il doit pour cela procéder à un **traitement métacognitif de ses conjectures** pour expliquer son cheminement. On peut donc considérer, du moins au niveau primaire, que les processus argumentatifs du chercheur peuvent être transposés en processus explicatifs pour l'élève.

Comme pour le traitement des autres composantes, les processus développés autour de la composante *Solution(s)* ont une influence sur le traitement des autres composantes. L'impossibilité d'effectuer un calcul, une valeur qui ne correspond pas à ce qui a été envisagé, ou ce qui était envisageable par exemple impose de revenir sur le traitement des deux autres composantes.

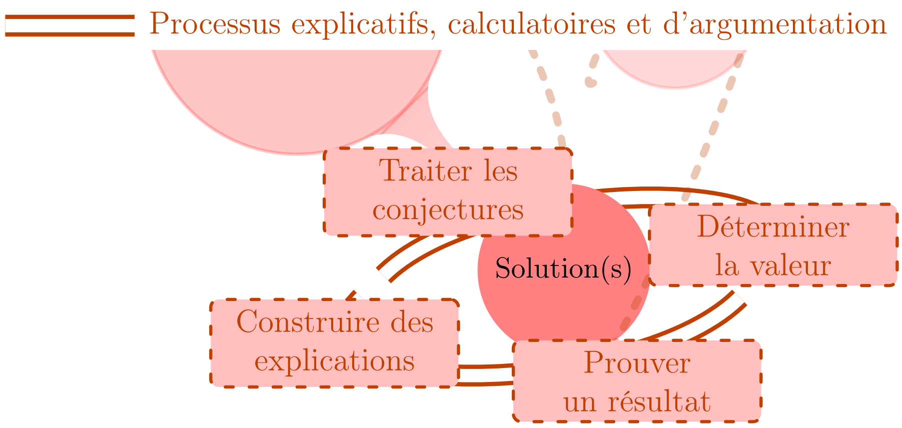


FIGURE 5.12 – Processus explicatifs, calculatoires et d'argumentation autour de la composante *Solution(s)*

5.3.4 Conclusion sur les processus élèves

Les contraintes scolaires (présence d'un énoncé et de l'enseignant) modifient la prise en charge des processus de résolution. **Nous proposons une modélisation de l'activité de résolution de problèmes qui permet d'envisager le traitement complet de chaque composante. Il nous semble que cette triple action est nécessaire pour affirmer que l'élève a résolu, et surtout pris la mesure, du problème.** C'est une condition selon nous indispensable à l'accomplissement de la mission qui est dévolue à cette activité par les institutions qui insistent sur la prise de sens, la mise en contexte et le développement des objets mathématiques, l'appropriation d'une démarche de recherche, etc ...

> "Il est facile de constater qu'habituellement nous proposons les solutions des problèmes sans tentatives ni doutes ; nous connaissances la solution (pour nous, professeurs, il n'y a pas de problème !) et nous développons de façon linéaire et le plus clairement possible. En conséquence, les élèves peuvent apprendre cette solution, la reproduire dans des situations suffisament voisines, mais en aucun cas ils n'apprennent à faire face aux difficultés d'un vrai problème. Implicitement, nous véhiculons une fausse image du problème" (Dumas-Carré, Goffard, & Gill, 1992)

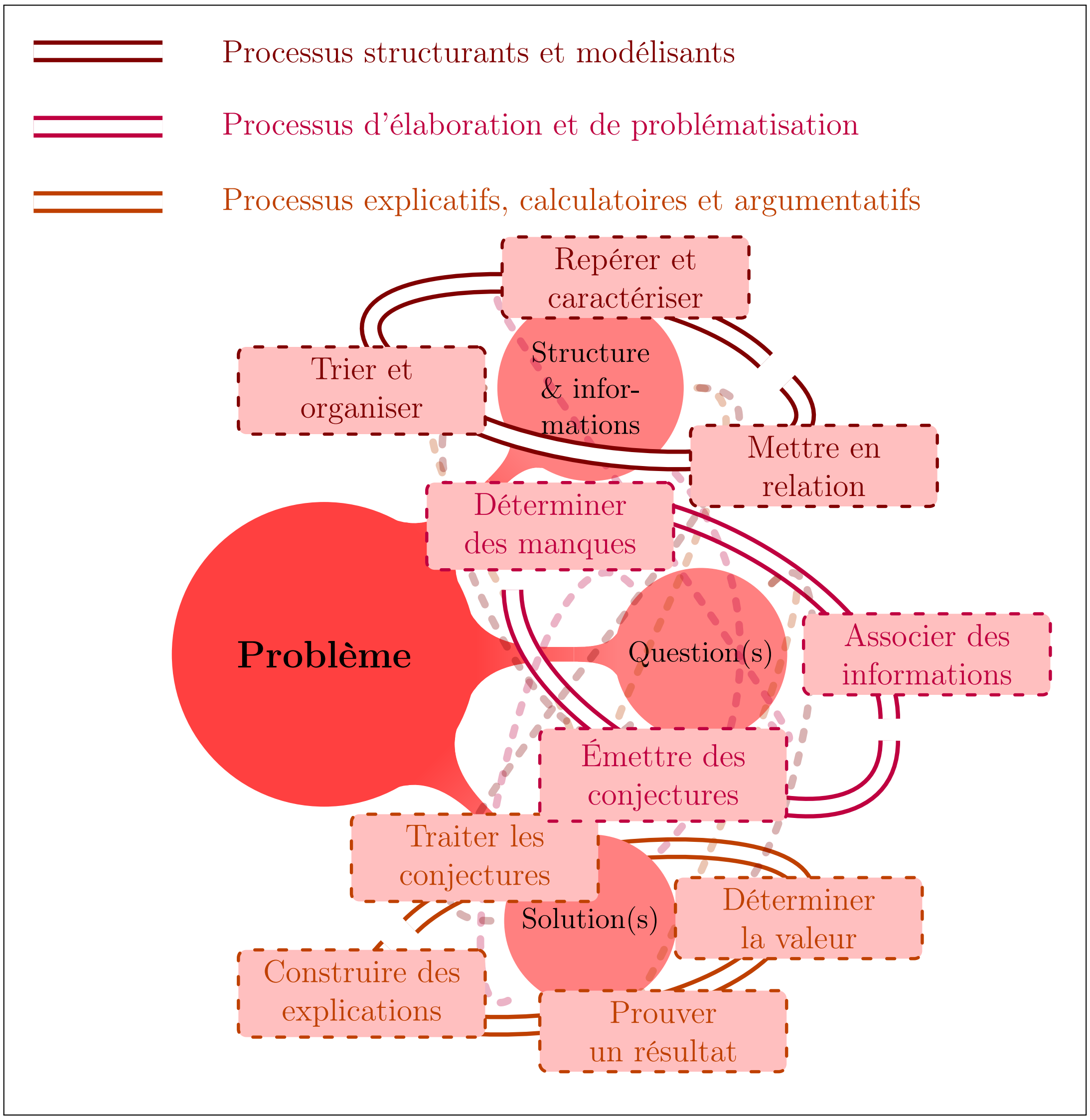


Figure 5.13 – Processus élèves en résolution de problèmes

Chapitre 6

Définition et caractéristiques du récit

Dans la conclusion de la partie précédente, nous avons évoqué le rapport privilégié que les élèves (et les humains en général) entretiennent avec le récit et les histoires. Dans ce chapitre ainsi que dans le suivant, nous proposons d'étudier certaines des caractéristiques de cette relation. Nous nous attachons plus particulièrement au rôle que peut jouer le récit dans la construction des apprentissages (mathématiques). Nous débutons sur une citation de Jerome S. Bruner, psychologue spécialiste de l'apprentissage, qui s'est intéressé au récit dans plusieurs de ses ouvrages [1] :

> *Nous entendons de toutes parts des histoires ; nous les racontons avec la même aisance que nous les comprenons, vraies ou inventées, réelles ou donnant l'apparence de l'être, accusations ou justifications. Nous les acceptons sans sourciller, comme si de rien n'était. Nous en sommes si friands qu'elles nous semblent aussi naturelles que le langage lui-même. Nous n'éprouvons aucune difficulté à inventer les histoires dont nous avons besoin pour atteindre nos objectifs, et nous savons dès le plus jeune âge faire subir à la vérité ces petites distorsions sournoises qui vont faire retomber la faute d'un verre de lait renversé sur notre petite sœur ou notre petit frère. Nous savons fort bien que les autres font de même. Nous commençons très tôt notre vie commune avec les histoires, et celles-ci nous accompagnent tout au long de notre vie. Comment s'étonner que nous nous en accommodions si bien ?* (Bruner, 2005, p. 15)

1. Nous citerons en particulier les deux ouvrages suivants :
   - *L'éducation, entrée dans la culture (Les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle)*, Col. Psychologie, Retz, Paris, 2008 (Nouvelle édition). Edition américaine originale : *The Culture of Education*, Harvard University Press, 1996.
   - *Pourquoi nous racontons-nous des histoires ? Le récit, au fondement de la culture et de l'identité*, Col. Forum Éducation Culture, Retz, Paris, 2005. Édition américaine originale : *Making Stories : Law, Literature, Life*, Farrar Straus & Giroux, New York, 2002.

Dans ces quelques phrases Bruner souligne à la fois l'omniprésence des histoires dans notre quotidien et notre facilité à les créer, à les comprendre et à les utiliser. Dès notre plus jeune âge, nous sommes en effet entourés par les récits. Nous commençons par écouter ceux que nos parents nous racontent puis, très vite, nous construisons nos propres histoires. Dès l'âge de six ans, les enfants disposent d'une structure narrative comparable à celle des adultes qui permet la construction d'histoires complexes (Fayol, 1985). L'être humain dispose d'une tendance naturelle au récit notamment lorsqu'il s'agit de produire des explications (Orange-Ravachol & Triquet, 2007 ; Orange-Ravachol, 2012). C'est sur cette prédisposition pour le récit que nous allons nous appuyer dans toute la suite de notre travail.

Avant d'aller plus loin, nous tenons à apporter quelques précisions sur notre définition du mot *récit*. Dans le langage courant, nous avons souvent tendance à confondre récit et histoire considérant ces deux mots comme étant synonymes. Selon Genette, histoire et récit s'inscrivent dans un rapport Signifié (l'histoire) / Signifiant (le récit). Ils s'articulent dans une relation triangulaire avec la narration. On parle alors de *triade narratologique* dont Genette propose une définition dans son ouvrage *Figures III* (1972) [2] :

- **L'histoire** : elle correspond aux évènements racontés, aux référents des signes textuels ;
- **Le récit** : il correspond alors à l'énoncé narratif (avec tous ses éléments de structure) et aux signes qui composent le texte ;
- **La narration** : elle est l'empreinte (plus ou moins marquée) de l'acte d'énonciation.

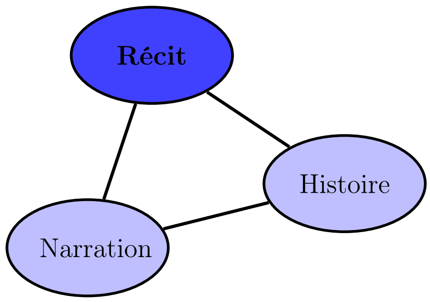


FIGURE 6.1 – Triade narratologique

Cette définition considère le récit comme un objet concret, visible (composé de signes). Et en effet, lorsqu'il est question de *récit*, nous pensons en premier lieu à un objet linguistique, racontant une histoire et montrant des caractéristiques de forme singulières. Cependant, il existe deux niveaux permettant de considérer le récit. Le premier, comme nous venons de le dire, voit le récit comme un objet déjà produit. Celui-ci peut être mobilisé en tant que tel par les élèves. Le second, aborde le récit sous l'angle de son élaboration, comme mode de pensée, au regard des fonctions heuristiques et structurantes mises en avant par plusieurs chercheurs.

2. Jouve (2007) reprend les objets de la triade de Genette (1972) et définit (p. 25) :
– le récit comme un discours, oral ou écrit, qui présente une intrigue ;
– l'histoire comme l'objet du récit, ce qu'il raconte ;
– la narration comme l'acte producteur du récit qui, comme tel, rend en charge les choix techniques comme le rythme du récit ou l'ordre dans lequel l'histoire est racontée.

En nous appuyant sur le travail de Genette (1972) et Bruner (2008), nous définissons dans la suite de chapitre, le récit de la manière suivante :

Récit : **Production, orale ou écrite, relatant une succession d'évènements organisés autour d'un élément problématique.**

Ces évènements mettent traditionnelement en jeu des personnages, engagés dans des actions dans un cadre spatio-temporel déterminé. . Dans ce chapitre, nous précisons cette définition en caractérisant le récit au travers de quatre concepts qui nous sont apparus comme fondamentaux lors de nos lectures :

- **la situation** qui regroupe les personnages, les lieux et les temps ;
- **les évènements** qui sont les actions des personnages dans ce cadre spatio-temporel ;
- **l'intrigue** qui se constuit autour et à partir d'un évènement perturbateur ;
- **la fiction** et les mondes possibles qui sont les différentes alternatives que lecteur et auteur peuvent envisager.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au récit en tant qu'objet linguistique. Grâce aux travaux de Ricœur (1985), Bruner (2005, 2008) et Genette (1972) nous explicitons différents éléments qui entrent en jeu dans la composition d'un récit : la situation, les personnages, l'élément problématique, les évènements et l'intrigue (Section 6.3). Nous pouvons souligner dès à présent le parallèle que nous opérons avec la modélisation du problème que nous avons proposée dans le chapitre 5 (p. 91) [3]. Dans un second temps, nous considérons le récit dans son acte de production et de réception en prenant en compte l'auteur et le récepteur d'un récit. Nous pouvons ainsi nous intéresser au contrat de lecture (et donc d'écriture) proposé par Eco (1996). Nous abordons également les notions de fiction et de mondes possibles qui concernent plus particulièrement le récit de fiction. Nous mettons ainsi en évidence le rapport du récit avec le monde réel, en particulier du point de vue des connaissances (Section 6.2). Enfin, nous concluons en introduisant la notion de *fonctions du récit*, que nous avons déjà évoqué sans la définir précisément.

3. **Problème de mathématiques :** Donnée d'informations structurées (définissant une situation) qui met en jeu un objet mathématique et posant une question à laquelle il n'est possible de répondre qu'après élaboration d'un raisonnement.

6.1 Approche interne et composition de l'objet récit : Situation, évènements, intrigue

Genette (1972) définit le récit comme un signifiant en opposition avec l'histoire qui est, quant à elle, le signifié. Le récit permet de raconter une histoire. L'histoire peut cependant exister en dehors de tout récit. Genette se place ici dans une approche "interne" au sens de Reuter (2009, p. 7). Dans ce type d'approche, le récit est considéré comme un objet linguistique. Il est alors matériel, existant, terminé, déterminé et il n'est plus possible d'agir sur sa composition. L'auteur et le lecteur sont écartés pour un temps pour permettre une analye du récit dans sa forme et sa composition. C'est avec ce type d'approche que nous débutons ce chapitre.

6.1.1 Situation : relations entre les personnages, les objets, les lieux et les temps

En amont d'un récit, voire même bien avant (comme le sous-entend Bruner), il y a une **situation**. Dans *Pourquoi nous racontons nous des histoires ?*, Bruner précise que les histoires *"commencent toujours (...) par considérer une situation de départ comme allant de soi (et par nous inviter, nous qui les écoutons à faire de même)"* (Bruner, 2005, p. 9). La situation, comme son nom l'indique, permet de situer les différents éléments qui entrent en jeu dans l'histoire :

- les personnages, qu'ils soient humains ou non ;
- les objets avec lesquels les personnages interagissent ;
- les lieux dans lequels se déroule l'histoire, qui peuvent être réels ou imaginaires ;
- le temps de l'histoire, passé, présent ou futur, voire fictif.

La situation peut s'appréhender selon deux dimensions. D'une part, la donnée d'informations sur ces quatre types d'éléments, d'autre part la structure qui permet de les relier. Ensemble, ces informations et cette structure constituent la première composante du récit (Figure 6.2).

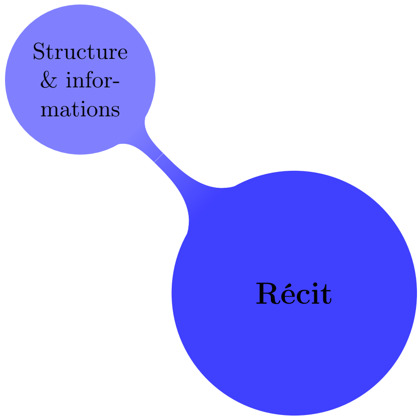


Figure 6.2 – Première composante du récit : la situation

La situation évolue au cours de l'histoire, on parle souvent de situation initiale (au début de l'histoire) et de situation finale (à la fin de l'histoire). La situation, même si elle évolue, reste du début à la fin de l'histoire un objet structuré. Les personnages, les objets, les lieux et le temps subissent des transformations qui modifient les relations qui les unissent. D'un point de vue pratique, il est généralement possible d'analyser les transformations qui se déroulent dans un récit en s'intéressant exclusivement à "l'effet personnage" (Jouve, 1992). L'organisation d'un texte est en effet bien souvent centrée autour de ses personnages (Glaudes & Reuter, 1996). Avant de nous intéresser à ces transformations dans le point suivant, nous revenons sur la notion de situation, telle que nous l'avons définie, dans un problème de mathématique.

Lorsque nous nous sommes intéressés aux situations portées par les problèmes de mathématiques (Chapitre 5, p. 95), nous avons également insisté sur le caractère structuré de la situation qui était en jeu. Comprendre une situation, que ce soit dans un récit ou dans un problème, c'est déterminer toutes les relations qui se jouent entre les informations qui sont données. La résolution du problème est de fait intimement liée à la détermination complète de la structure de la situation. De même, la compréhension d'une histoire est dépendante de la détermination de la structure qui lie entre elles toutes les informations (personnages, objets, lieux et temps).

6.1.2 Succesion d'évènements, élément perturbateur et intrigue

À partir d'une situation donnée, deux éléments sont nécessaires, selon Bruner, pour construire une histoire. Le premier est la construction d'une succession d'évènements. Il est en effet évident qu'une situation immuable, qui ne bouge pas, ne constitue pas une histoire. Il faut que "quelque chose" se passe pour qu'il y ait une histoire à raconter (si rien ne se passe, on est dans le cadre d'une description). Cette succession d'évènements porte le récit ainsi que sa temporalité. La succession des évènements rythme le récit et les unités de temps traditionnelles ne sont pas toujours privilégiées pour mesurer le temps qui passe dans une histoire.

Le simple rapport d'évènements ne constitue pas encore un récit. Bruner indique que *"la dynamique du récit ne se déclenche que lorsqu'apparaît une rupture dans la banalité : il faut alors y faire face, la maîtriser, ramener les choses dans leur sillon familier"* (Bruner, 2005, p. 79). Cette rupture, souvent appelé **élément perturbateur**, est le deuxième élément nécessaire à la construction d'une histoire. Les choix faits par l'auteur dans la construction des évènements vont être orientés par la nécessité de retour à un équilibre. L'élément perturbateur, à l'origine du déséquilibre, constitue le point de départ de l'intrigue. La *peripetia perturbe la séquence attendue* (Bruner, 2005, p. 9), le récit se charge de résoudre l'intrigue. Rappelons à ce sujet les propos de Bruner (2008) qui donnent au récit la *"mission" de résoudre l'inattendu, d'apaiser le doute de l'auditeur, ou d'une certaine manière, de redresser ou d'expliquer le "déséquilibre" qu'a porté l'histoire racontée au premier plan* (Bruner, 2008, p. 152). Veyne (1971), dans *Comment on écrit l'histoire*, présentait la notion d'intrigue en l'assimilant à un tissu qui permettrait de soutenir l'ensemble des évènements. Elle structure le récit en lui imprimant un schéma de causes et de hasards [4].

Cette notion d'intrigue est essentielle dans la caractérisation du récit. Dans sa série d'ouvrages *Temps et récit* (1983, 1984, 1985), Ricœur poursuit les travaux de Veyne et souligne que l'intrigue est un trait caractéristique du récit de fiction. Elle est composée d'une hiérarchie d'épisodes imbriqués et emboîtés. L'intrigue soutient la structure du récit. À son origine, l'intrigue est en fait une question qui se décline sous plusieurs formes : Comment revenir à l'équilibre ? Comment expliquer la rupture (au sens proposé par Bruner) ? En ce sens, nous pouvons rapprocher l'intrigue de la question posée dans une problème de mathématiques. Dans les deux cas, récit ou problème, une question est posée par rapport à la donnée d'une situation. Pour résoudre cette question et atteindre un état d'équilibre, le concepteur d'un récit construit une suite d'évènements organisés ; le résolveur de problème construit un raisonnement. L'intrigue et sa résolution, tout comme la question et la solution dans le cadre d'un problème, constituent avec la situation les trois composantes de l'objet récit (Figure 6.3). On peut considérer, à la manière de Bruguière et Triquet (2012) que *"la résolution correspond (...) à l'enchaînement des actions enclenchées par l'évènement perturbateur à l'origine de l'intrigue."* (p. 207).

Nous définissons ainsi, trois composantes pour modéliser l'objet *récit* (Figure 6.3) :
- La structure et les informations ;
- L'élément problématique, ou complication, qui engendre la construction de l'intrigue ;
- Le dénouement qui correspond à la résolution de l'intrigue.

4. *"Les faits n'existent pas isolément, en ce sens que le tissu de l'histoire est ce que nous appellerons une intrigue, un mélange très humain et très peu « scientifique» de causes matérielles, de fins et de hasards ; une tranche de vie, en un mot, que l'historien découpe à son gré et où les faits ont leurs liaisons objectives et leur importance relative (...) Cette intrigue ne s'ordonne pas nécessairement selon une suite chronologique : comme un drame intérieur, elle peut se dérouler d'un plan à l'autre ; (...) elle sera toujours intrigue parce qu'elle sera humaine, sublunaire, parce qu'elle ne sera pas un morceau de déterminisme."* (Veyne,1971)

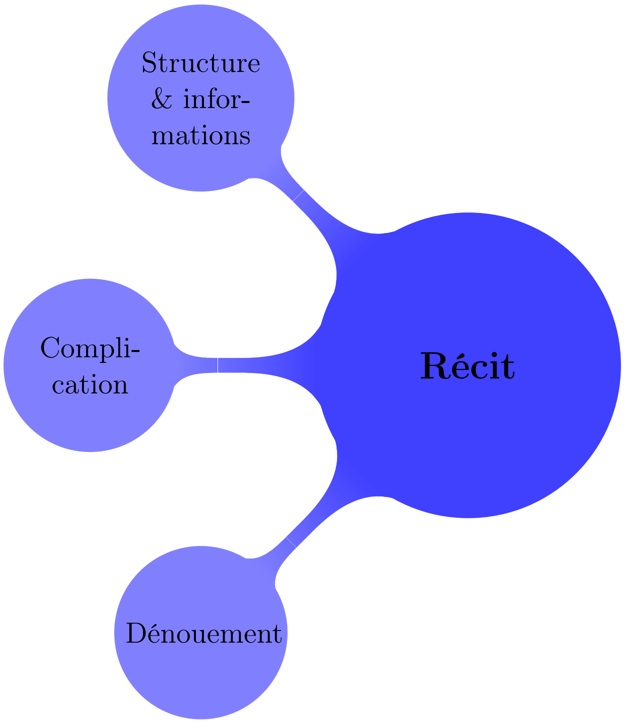


FIGURE 6.3 – Composantes du récit

Dans le chapitre 7, nous associerons à ces composantes – comme nous l'avons fait dans le chapitre 6 de notre thèse pour les composantes du problème – les actions du producteur et du récepteur du récit. Avant cela, nous nous intéressons dans le point suivant aux concepts de contrat de lecture, de fiction et de mondes possibles qui sont selon nous à l'origine de ces fonctions du récit (problématisation, explication, etc.). C'est en effet, comme le soulignent bien Bruguière et Triquet, autour de ces composantes que vont pouvoir se mettre en place les fonctions du récit :

> *"Si celui-ci [l'élément perturbateur] est apparu déterminant pour la mise en place d'un questionnement, c'est à présent la phase de résolution qui peut être considérée comme structurante pour la construction d'explications, en réponse aux interrogations provoquées par la complication initiale"* (Bruguière & Triquet, 2012, p. 207).

6.2 Approche externe : Contrat de lecture, fiction, mondes possibles

Maintenant que nous avons défini les composantes internes de l'objet récit, nous adoptons un point de vue plus externe. En nous intéressant au producteur et au lecteur du récit nous abordons les notions de contrat de lecture, de fiction et de mondes possibles. C'est à partir de ces notions que nous pourrons aborder la question des fonctions du récit.

6.2.1 Contrat de lecture

Le rapport entre le lecteur et le producteur du récit s'établit selon un principe de confiance. À la base de ce principe, un constat simple : dans un récit, tout ce qui n'est présenté explicitement comme différent du monde de référence y est conforme. Par exemple, comme le montre très bien Jouve dans *l'effet-personnage dans le roman*, *"même les créatures les plus fantastiques des romans de science-fiction conservent, au milieu d'attributs plus ou moins insolites, des proprités directement empruntées aux individus du monde "réel" (...) Un être alternatif complet est, à la lettre, inassimilable par le lecteur"* (1992, p. 28). La confiance du lecteur repose sur cette possibilité de se raccrocher, quelque soit l'invraisemblance du monde proposé, à son monde de référence.

Dans *Six promenades dans les bois du roman et d'ailleurs*, Eco (1996) défini un contrat de lecture des récits, et par conséquent un contrat d'écriture. Il s'agit d'un contrat implicite entre lecteur et auteur modèle. Il n'existe pas de lecteur modèle sans un auteur modèle. *Auteur et lecteur modèle sont deux images qui (...) se construisent réciproquement* (Eco, 1996, p. 25). La voix de l'auteur modèle *se manifeste comme une stratégie narrative, comme ensemble d'instructions nous étant imparties auxquelles on doit obéir lorqu'on décide de se comporter en lecteur modèle* (Ibid. p. 25). Le lecteur doit adhérer à un *principe de confiance* (Ibid. p. 119), il doit accepter le monde crée par l'auteur comme vraissemblable. Réciproquement, l'auteur se doit de respecter une certaine cohérence. *Même le monde le plus impossible doit avoir un fond réel* (Ibid. p. 196).

Les propos d'Eco nous permettent d'introduire un concept que nous n'avions pas encore abordé explicitement : la fiction. Les composantes du récit (situation, intrigue, résolution) que nous avons décrites dans le point précédent peuvent être utilisées indifférement dans un récit à sujet réel ou fictionnel. Cependant, dans la suite de ce chapitre, nous allons recentrer notre réflexion sur le récit de fiction.

6.2.2 Fiction et mondes possibles

Par le terme "fiction", on désigne généralement quelque chose qui ne correspond pas à une situation réelle. De plus, comme le soulignent Bruguière et Triquet (2012), le sens commun tend à situer la fiction hors de toute réalité. Cependant, et nous l'avons déjà fait remarqué précédemment par les propos de Vincent Jouve sur le personnage, la fiction n'est jamais totalement déconnectée de la réalité. Eco (1996), tout comme Ricœur (1986) mettent en avant la dimension référentielle de la fiction. Le monde construit par un récit de fiction reste dépendant du monde réel. Tout ce qui n'y est pas présenté comme différent s'y conforme. Par conséquent, le récit de fiction peut, contrairement à ce qu'on pourrait imaginer, permettre de questionner notre connaissance du monde :

> *"Véritable expérience de pensée, la littérature peut effectivement permettre aux enfants de mieux comprendre le monde, de le rendre plus intelligible. La fiction littéraire n'est pas seulement de l'ordre de l'imaginaire, elle dispose d'une fonction référentielle qui dévoile des dimensions insoupçonnées de la réalité. Cette fonction référentielle semble d'ailleurs évidente pour les enfants, tant leur rapport à la fiction et à l'imaginaire est constitutif de leur condition"* (Chirouter, 2010, p. 10).

Si l'article de Chirouter se concentre sur les enfants, nous pouvons prolonger cette affirmation sur les lecteurs adultes. Bruner en particulier insiste sur cette propriété du récit qui permet à tout lecteur de questionner *"toutes les affirmations quotidiennes qui paraissent aller de soi"* Bruner (2008, p. 23).

En laissant libre le recours à des mondes alternatifs, la fiction permet de s'affranchir du réel. Les récits de fiction peuvent alors nous entrainer dans des expériences de pensée complexes. Auteur et lecteur ont ainsi la possibilité de s'inscrire dans des *possibles* voire des *mondes possibles* (Hintikka, 1989) pour explorer une situation [5]. Ces mondes possibles – qu'ils soient proches ou très éloignés du réel – permettent un retour sur la situation et donc sur le réel auquel ils font référence. Bruguière et Heraud ont bien montré les potentialités de ces mondes possibles dans la construction de connaissances scientifiques : *"les travaux d'Hintikka (1989) sur la théorie sémantique des mondes possibles nous permettent d'interpréter les rapports entre les évènements du récit et les phénomènes du monde existant (...) et d'en dégager l'intérêt en termes de construction de connaissances scientifiques chez les élèves"*(Bruguière & Héraud, 2007, p. 45).

La construction ou l'interprétation de ces mondes possibles peut ainsi permettre de s'interroger sur le monde réel. Construit dans l'objectif de répondre à la question posée par l'intrigue, le récit est en fait une production permettant d'expliquer une situation problématique. Le récit est en quelque sorte un *possible explicatif*, c'est à dire une proposition cohérente permettant d'expliquer une situation problématique. De part les caractéristiques que nous venons d'explorer, nous pouvons aller plus loin et faire l'hypothèse que **le récit, en permettant de s'affranchir du réel, permet – autant au lecteur qu'au**

5. Nos propos portent bien ici sur la composante situation que nous avons caractérisé p. 113.

rédacteur – d'envisager différents possibles explicatifs voir de construire des conjectures et de les valider (et ceci dans n'importe quel domaine de connaissances).

6.3 Le récit en tant que mode de pensée

Pour travailler sur cette hypothèse, nous proposons dans le chapitre suivant de nous intéresser plus spécifiquement aux *fonctions du récit*. Il s'agit alors de considérer le récit non seulement comme un objet mais également (et surtout) comme un mode de pensée. À ce sujet, Bruner nous rappelle qu'*il est possible de distinguer avec précision ce qui appartient au mode de pensée narratif de ce qui est texte ou discours narratif* (Bruner, 2008, p. 166). Il est par conséquent possible de s'intéresser aux processus qui permettent de construire ou de comprendre un récit en les considérant comme de véritables outils de construction de connaissances. Les récits font en effet plus que raconter, ils *imposent leur structure, leur réalité contraignante à ce que nous vivons.* (Bruner, 2008, p. 79). En tant que mode de pensée, le récit est une *"structure pour organiser notre savoir, en tant que véhicule dans le processus de l'éducation, particulièrement dans le domaine des sciences."* (Bruner, 2008, p. 149).

C'est dans cette perspective et avec cette ambition que nous travaillons sur le récit. En nous appuyant sur des fonctions du récit qui sont, comme nous le verrons, à la fois structurantes et heuristiques, nous pourrons envisager par la suite une action du récit sur les processus relatifs à l'activité de résolution de problèmes. Il est alors nécessaire de prolonger le postulat de départ des travaux expérimentaux que nous avons évoqué précedemment (Bruguière & Héraud, 2007 ; Bruguière & Triquet, 2012) en affirmant que les fonctions heuristiques et structurantes du récit peuvent être utilisées, non seulement en sciences expérimentales, mais également en mathématiques.

Chapitre 7

Les fonctions du récit selon les théoriciens du récit & illustrations en sciences expérimentales

Nous l'avons souligné dans la conclusion du chapitre précédent, le récit n'est pas un simple objet linguistique. Il possède en particulier une structure forte (*Cf.* Chapitre 6, 6.1.1), qui assure en quelque sorte le contrôle de ce que nous pouvons appeler la *logique du récit*. Le récit se doit de rester cohérent avec les règles (logiques, physiques, etc.) établies par la situation, et ceci même si elles ne sont pas conformes à celles du monde réel dans le cadre d'un récit de fiction. Lorsque nous parlons de *logique du récit*, nous considérons donc toutes les *"lois qui régissent l'univers raconté"* (Bremond, 1966, p. 60) [1].

Les contraintes relatives à cette structure (dont font partie la mise en place de l'intrigue et sa résolution) amènent la mise en place de processus cognitifs – que ce soit chez le producteur ou chez le récepteur du récit – qui sont à la fois heuristiques et structurants. En effet, le rédacteur d'un récit doit produire une succession d'évènements qui doit à la fois répondre à une question, celle posée par l'intrigue, et à la fois respecter des contraintes fortes de logique et de structure. Dans un récit, il se peut que l'intrigue soit implicite, c'est même souvent le cas. Ce qui est explicite c'est la contradiction de l'état initial avec l'élément perturbateur. C'est à ce moment que la construction de l'intrigue et le travail du rédacteur et du lecteur débute. Le lecteur doit comprendre, ou imaginer lorsque le récit comporte des implicites, comment il est possible de construire une explication qui permette de résoudre l'intrigue proposée par l'auteur tout en respectant les contraintes de l'univers raconté. **De part ces caractéristiques (définies dans le chapitre 6), nous faisons l'hypothèse que le récit peut être considéré, non seulement comme un objet, mais comme un véritable mode de pensée.**

1. Claude Brémond dans *La logique des possibles narratifs* (1966) considère deux types de contraintes : les règles qui *reflètent les contraintes logiques que toute série d'évènements ordonnée en forme de récit doit respecter sous peine d'être inintelligible* ; et les contraintes *valables pour tout récit, les conventions de leur univers particulier, caractéristique d'une culture, d'une époque, d'un genre litéraire, du style d'un conteur ou, à la limite, de ce seul récit lui même.*

En proposant dans notre travail le récit comme support de la pensée (*Cf.* Partie I), nous espérons permettre aux élèves de s'appuyer sur une forme de questionnement et d'organisation de la pensée qui est la première à être développée par les enfants :

> *Tout indique (...) que la manière la plus naturelle et la plus précoce dont nous organisons nos expériences et nos connaissances prend précisément une forme narrative* (Bruner, 2008, p. 151).

En nous appuyant sur les caractéristiques du récit que nous avons définies, nous proposons de nous intéresser dans ce second chapitre à ces processus heuristiques et structurants. Nous mettons en avant trois fonctions qui peuvent être (sup)portées par le récit : la structuration, la problématisation, l'explication. Pour aboutir à ces trois fonctions, nous avons en fait classé différents types d'opérations intellectuelles, relatives au récit, autour des composantes que nous avons définies dans le chapitre précédent : situation au travers de sa structure, complication via l'intrigue et dénouement en rapport à la résolution de l'intrigue.

7.1 Fonction structurante via la situation

> **L'ambiguïté de la référence**[2] : *Ce dont parle un récit est toujours ouvert au questionnement, quel que soit l'effort que nous faisons pour en "vérifier" les faits. Ces faits sont en effet, après tout, des fonctions de l'histoire. Le réalisme narratif, qu'il soit "factuel" comme dans le journalisme ou qu'il soit purement "ficitif", est somme toute affaire de convention littéraire. Le récit crée ou constitue ses références, la "réalité" à laquelle il se réfère au point qu'il en devient ambigu comme jamais ne l'est la référence du philosophe* (Bruner, 2008, p. 174).

Dans son discours, Bruner distingue *l'objet du récit*[3], des (nouvelles) *références crées par le récit lui même*[4]. **Le récit prend en charge des objets (personnages, lieux, temps, etc.), il les représente et les met en scène.** Il ne s'agit pas d'une simple description mais bien d'une véritable mise en scène qui peut avoir lieu dans un monde réaliste ou complètement fictionnel. Une des caractéristiques de cette mise en scène est qu'elle permet – au rédacteur et au lecteur – de se projeter : soit dans un univers familier, accessible qui va permettre d'appréhender une situation plus facilement ; soit dans

2. L'ambiguité de la référence est le sixième des "neuf universaux des réalités narratives" que Bruner a construit comme une réponse à la question : *Que gagne-t-on ou que perd-on en ayant recours à une analyse narrative ?* (Bruner, 2008, p. 156)

3. "ce dont parle un récit", et donc l'objet du monde réel auquel il fait référence

4. "le récit crée ou consitue ses références" qui peuvent être des métaphores ou des illustrations du monde réel

un univers imaginaire qui va permettre d'envisager des situations nouvelles.

Dans les deux cas, le récit prend donc en charge une double fonction référentielle : la référence à la situation ou a l'objet réel (le récit, même de fiction, parle d'au moins un objet existant) et la référence nouvelle, qui est crée par le récit. Le récit engage l'objet dans une situation qu'il n'est pas toujours possible d'atteindre directement et qui peut devenir une situation de référence [5]. Le récit permet ainsi d'envisager et de construire de nouveaux modèles. **La description d'une situation dans un récit est ainsi une sorte de modélisation.**

Pour prendre en charge des aspects du monde, souvent disparates, les modéliser et tenter de les expliquer, la situation portée par le récit doit s'organiser en un tout cohérent. Pour Ricœur (1983, 1984), c'est la mise en intrigue qui permet cette organisation. Il la définit comme une action qui permet le passage d'une séquence linéaire d'évènements ou de phénomènes dissociés (plus ou moins contingeants) à un véritable agencement cohérent au niveau des relations spatiales, temporelles et surtout causales. Cette définition de l'intrigue se rapproche de celle de la problématisation scientifique. Nous développerons cet aspect dans le point suivant. Néanmoins, ce qui nous intéresse ici, ce sont les processus structurants qui sont, de fait, portés par le récit. **Le récit permet la construction de ce que Ricœur appelle le *holos* (le tout) qui est en fait un assemblage cohérent d'éléments qui pouvaient sembler disparates au départ**. Cette vision des choses est compatible avec la manière dont nous avons envisagé le travail de détermination de la situation en résolution de problèmes (Chapitre 5, p. 95). Il s'agit de caractériser tous les objets en jeu dans le récit ainsi que leurs relations.

Le récit a ceci d'intéressant qu'il permet d'envisager et de rendre compte de plusieurs types de relations, parfois complexes. Rien qu'au niveau des relations temporelles, **le récit découpe le temps** sans faire appel, comme le dit Bruner (2008, p. 166), à une montre ou un métronome mais par le biais des évènements. Ce *temps narratif*, qui est "humainement pertinent" selon Ricœur (1985) donne une signification aux évènements. Il en est de même pour les relations spatiales, causales ou encore logiques. **Le récit, en tant qu'énoncé narratif, prend en charge des éléments structurels qui permettent de rendre compte des relations entre objets.** L'exemple le plus basique et sans doute le plus clair que nous pouvons donner est l'emploi, naturel dans un récit, de mots de liaison (conjonction de coordination, adverbes de lieu, etc.) qui, de part leur variété, permettent de refléter tout type de relation.

5. Capacité de référence qui est souvent, à tort selon Ricœur, niée au récit de fiction (1983, p. 148).

7.2 Fonction problématisante via l'intrigue

Dans un récit, la recherche du sens se fait par rapport à un élément inattendu et donc problématique :

> **Au cœur du récit, un problème obstacle**[6] **:** *Les histoires tournent autour de normes bousculées. (...) Cela met les "problèmes-obstacles" au centre des réalités narratives. Les histoires qui méritent d'être analysées naissent au milieu des problèmes* (Bruner, 2008, p. 177).

Bruner insiste ici sur le fait qu'une histoire se construit toujours autour d'un élément problématique. C'est un *leitmotiv* qu'il décline dans les ouvrages que nous citons dans ce chapitre. Dans *Pourquoi nous racontons des histoires*, il parle par exemple d'une brêche dans l'ordre des choses. En bousculant ce que nous pensions être la norme, **la mise en place de l'intrigue impose de reconsidérer nos schémas de pensée et d'action**. Triquet (2007) compare cette apparition problématique et les questions qu'elle amène à la construction d'un problème scientifique : *On trouve là une similitude avec le problème scientifique tel que le définit un épistémologue comme Laudan (1977). En science le problème n'émergerait en effet que dans la conscience d'un défaut de savoir et/ou d'une mise en défaut des conceptions premières. Une idée ou un fait étrange s'impose alors aux scientifiques et appelle une explication* (Bruguière & Triquet, 2012, p. 5). **La construction d'une intrigue à partir d'un évènement perturbateur est ainsi comparable à la construction d'un problème.**

Le rapprochement entre récit et problème scientifique opéré par Triquet illustre bien l'activité problématisante que peut amener un récit via son intrigue. **En perturbant nos schémas de pensée et d'action, un élément problématique nous amène à nous repositionner par rapport à ce que nous pensions être le vrai, la norme**. Le défaut de savoir engendré par un problème (qu'il soit scientifique ou mathématique) peut se rapprocher du défaut de savoir à la base d'une intrigue dans un récit. Dans les deux cas, le résolveur, le rédacteur ou le lecteur vont être amenés à considérer une situation sous un angle nouveau et problématisant. Sur l'exemple de ce qu'ils appellent des *fictions réalistes*[7], Bruguière et Triquet font l'hypothèse que :

> *l'intrigue constitue potentiellement un levier pour questionner de façon problématique le réel auquel se réfère l'histoire. Mais comment la lecture d'un récit de fiction (...) peut-elle susciter un questionnement et un raisonnement de type scientifique ? En fait, la lecture d'un récit de fiction ne nous amène pas*

---

6. Universel narratif de Bruner

7. *"Type de récits que nous qualifions à présent de « fiction réaliste » qui présente la particularité de faire entrer le réel dans la fiction, sans que ce dernier soit a priori un objet de connaissance scientifique. L'histoire est ici assujettie aux règles habituelles du récit de fiction (personnification, intrigue, épisodes. . .), mais celle-ci fait intervenir au niveau de l'intrigue (complication, résolution) des contraintes et/ou l'épreuve des lois de la nature."* (Bruguière & Triquet, 2012, p. 202).

directement à nous interroger sur le monde réel, mais plutôt à nous interroger sur la compréhension de la logique de l'intrigue et de sa résolution (Bruguière & Triquet, 2012, p. 203) [8].

C'est bien ce que nous dit Bruner en parlant de la *canonicité implicite* [9] du récit : *Pour mériter d'être raconté, un récit doit aller à l'encontre de ce que l'on attend, doit briser un scénario canonique ou dévier de (...) la légitimité.* (Bruner, 2008, p. 173).

Le récit, via l'élément perturbateur bouscule donc bien nos habitudes, nos connaissances. De fait, pour retrouver un équilibre, rédacteur et lecteur sont amenés à mettre en place de nouveaux modèles de pensée et peuvent entrer dans une activité de problématisation. **La mise en place d'une intrigue peut ainsi permettre d'abandonner une connaissance d'opinion, une connaissance mal questionnée pour aller vers une connaissance problématisée.** C'est le propre de l'activité scientifique telle qu'elle est envisagée par Fabre et Orange (1997) et c'est le propre de l'activité de problèmes telle que nous avons souhaité la définir. Placé face à un problème, le résolveur doit reconsidérer les informations dont il dispose pour répondre à une question qui met en défaut ses connaissances.

7.3 Fonction explicative via la résolution

La résolution du questionnement engendré par l'intrigue peut elle aussi trouver sa place dans le récit. Pour terminer l'histoire, l'auteur d'un récit doit répondre à la (aux) question(s) posée(s) par son intrigue. Le lecteur participe également à la résolution de l'intrigue en anticipant sur les explications proposées ou en comblant les implicites laissés par l'auteur. Dans cette optique, le cadre du récit – via la fiction et les mondes possibles qu'elle permet d'envisager – offre un espace pratiquement illimité.

Après le questionnement engendré par l'élément perturbateur et la mise en place de l'intrigue, **la phase de résolution peut être rapprochée d'une construction d'explications**. Comme le disent bien Bruguière et Triquet en s'appuyant sur les travaux de Bruner, *"la phase de résolution (...) peut être considérée comme structurante pour la construction d'explications, en réponse aux interrogations provoquées par la complication initiale."* (Bruguière & Triquet, 2012, p. 207). Il est possible d'appréhender le récit comme une véritable expérience de pensée. **À travers la fiction, le récit permet en effet d'envisager des mondes alternatifs**. Comme ils ne sont pas déconnectés de la

8. Dans le n° 44 de la revue ASTER, Bruguière et Héraud (2007) et Triquet (2007) ont montré le caractère heuristique des récit de fiction dans le questionnement scientifique et épistémologique dans le cadre d'un travail didactique centré réspectivement sur un album de jeunesse et une visite d'un musée.

9. Septième universel narratif de Bruner.

réalité, ces constructions entrainent un questionnement sur le réel lui-même. En cela, la fiction nous permet d'aller au-delà de nos croyances et de nos savoirs. Selon Bruner, son rôle est de *"nous entraîner dans le domaine du possible, de ce qui pourrait être, de ce qui aurait pu être, de ce qui sera peut-être un jour"* (Bruner, 2005, p. 16). **Ces mondes possibles, construits sur le réel et qui en sont donc dépendants, offrent un espace qui est à la fois ouvert et entièrement structuré : Ouvert car les fictions permettent de s'affranchir de la réalité et donc laisser libre court à l'imagination du rédacteur et du lecteur. Structuré car les mondes possibles se doivent de respecter la structure de la situation, la logique du récit et également une partie des lois du monde réel.**

Au premier abord, il peut être difficile de voir le rôle que peut jouer le lecteur dans la construction de ces possibles. Il faut pour cela prendre conscience que le récit ne dit pas tout. **C'est un espace lacunaire, avec des non-dits que le *lecteur modèle* (Eco, 1985) doit combler.** Comme le souligne Tauveron *"Le sens d'un texte quel qu'il soit, (...) excède toujours la somme du/des mots qui le compose. Tout texte exige des inférences pour être compris (...) Les élèves en difficulté de lecture (...) croient que pour comprendre un texte il suffit d'identifier et de retenir chacun de ses mots et que de la somme de ces mots va jaillir du sens sans autre procédure, c'est-à-dire sans autre activité de leur part"* (Tauveron, 2003, p. 15). Le lecteur doit avoir un rapport actif avec le récit. C'est comme cela qu'il va pouvoir entrer dans une véritable processus d'appréhension et de constructions d'explications. Eco, dans *Lector in Fabula* (1985), insiste sur le rôle du lecteur, sur les interprétations qu'il peut construire. L'interprétation telle qu'Eco l'envisage correspond selon nous à la construction d'un monde possible : elle fait varier les propriétés des individus et des objets dans une structure cohérente. La lecture, tout comme la construction de récit, entraîne celui qui la vit dans des processus explicatifs.

La lecture est bien une *activité cognitive* (Tauveron, 2003, p. 40) qui, tout comme l'écriture, invite à la construction d'explications. Les blancs de l'histoire incitent le lecteur à imaginer, à spéculer sur différentes interprétations. Il faut sortir du texte puis essayer de valider ses théories grâce aux éléments imposés par le texte et par nos connaissances. **La résolution d'une intrigue passe donc par la construction d'une succession d'évènements.** Ceux-ci doivent permettre de proposer une explication cohérente pour répondre aux interrogations posées par l'intrigue. Comme nous l'avons fait dans le chapitre 6, nous envisageons la production de ces explications comme une véritable construction de *mondes possibles*. **Il ne s'agit pas seulement d'inventer mais de prendre en charge toutes les contraintes portées par le récit, la structure de la situation, la référence au réel, etc**.

7.4 Conclusion

Les différents auteurs que nous avons cités dans ce chapitre nous ont permis de caractériser trois fonctions du récit qui peuvent s'inscrire dans une activité de résolution de problèmes :

1. **Fonction structurante :** La mise en récit permet en effet de prendre en charge des objets et facilite leur mise en relation. En permettant de construire un tout cohérent, le récit peut jouer un rôle structurant dans l'organisation des connaissances et dans l'articulation des phénomènes. Le récit facilite ainsi la compréhension de systèmes complexes.

2. **Fonction problématisante :** Il n'y a pas de récit sans intrigue et donc sans problématisation. La mise en place de l'intrigue, via un élément perturbateur, peut être comparée à la construction d'un problème. Elle invite par conséquent à reconsidérer les connaissances en jeu et à adopter une démarche de problématisation.

3. **Fonction explicative :** Le récit, à travers la fiction, permet de construire des explications. Celles-ci s'inscrivent dans des "mondes possibles" qui, de part leur nature, prennent en charge toutes les contraintes portées par le récit et par la situation de référence. Les explications produites respectent par conséquent ces mêmes contraintes.

L'organisation narrative, celle du récit, se développe très tôt chez les enfants (Fayol, 1985). Elle est par conséquent antérieure aux organisations mathématiques qu'ils pourront acquérir lors de leur scolarité. **Nous pouvons donc faire l'hypothèse que pour acquérir les organisations mathématiques nécessaires à l'activité mathématique, les élèves peuvent s'appuyer sur une organisation pré-existante chez eux : l'organisation narrative, liée au récit.**

Dans cette même optique, Bruner propose de s'appuyer sur une *heuristique narrative* pour comprendre les phénomènes scientifiques :

> *Permettez-moi de faire une proposition : convertissons les efforts que nous consacrons à comprendre les sciences en récits ou, plus exactement, en "heuristique narrative". En disant "nous", je veux parler aussi bien des scientifiques que des élèves qui fréquentent les classes dans lesquelles nous enseignons. Cela consisterait à transformer les évènements que nous étudions pour leur donner une forme narrative, afin de mieux mettre en lumière ce qui est canonique et ce que l'on en attend, afin qu'il soit plus facile de distinguer ce qui "ne tient pas debout", ce qui est délirant et, par conséquent, a besoin d'être expliqué.* (Bruner, 2008, p. 156).

C'est dans cet esprit que nous avons construit la partie expérimentale de notre travail de thèse. Nous souhaitons permettre aux élèves de solliciter cette organisation narrative, et de fait les fonctions du récit, lorsqu'ils sont placés en situation de résolution de problèmes de mathématiques. Nous construirons dans la partie suivante (Partie III) les modèles théoriques que nous utiliserons pour définir et caractériser ces interactions. Pour cela, nous introduirons les travaux de Scardamalia et Bereiter (1987, 1998) dont les résultats nous permettent d'envisager l'utilisation des fonctions du récit en mathématiques.

Avant cela, nous souhaitons ouvrir notre conclusion vers la notion de preuve que nous n'avons pas encore abordée dans cette partie. En tant qu'outil de communication, le récit bénéficie d'un statut particulier. En étant un objet culturel, fictionnel il apparaît comme un support sur lequel il est possible de négocier. Selon Bruner, le récit dispose d'une *négociabilité intrinsèque*[10] ce qui peut le rendre très utile dans les débats d'opinion comme dans les débats scientifiques : *"[Vous] donnez votre version, je donne la mienne, et il est bien rare que nous ayons besoin d'un procès pour régler la différence. Nous prenons facilement les versions concurrentes d'une même histoire avec un petit grain de perspective, bien plus volontier que nous ne le ferions avec des arguments ou des preuves"* (Bruner, 2008, p. 178). Par conséquent, le récit peut selon nous facilement s'insérer dans une démarche de preuve. Sans forcément porter la structure de la démonstration, il peut s'y insérer facilement comme un élément "falsifiable"[11].

10. Universaux narratifs (Bruner, 2008, p. 178).

11. C'est à dire possible à vérifier ou à contredire scientifiquement, ou dans notre cas mathématiquement (Chalmers, 1987).

Chapitre 8

Modélisations théoriques des interactions entre construction de récit et résolution de problèmes

Dans ce chapitre, nous construisons et présentons une modélisation théorique de différents *lieux de rencontre* où construction de récit et résolution de problèmes de mathématiques peuvent interagir. Nous interprétons le terme *lieu de rencontre* dans toute son ampleur en y associant différents types d'objets tels que les processus en jeu dans les deux activités et le concept de milieu didactique. Dans les deux sections principales de ce chapitre, nous reconsidérons chacun de ces objets au travers des interactions potentielles entre le travail narratif inhérent à la construction d'un récit et la construction d'un raisonnement mathématique inhérent à la résolution d'un problème. Nous construisons ainsi plusieurs modélisations théoriques [1] correspondant aux différents *lieux de rencontre* considérés : processus et milieu didactique.

Pour réaliser ce travail théorique, nous nous sommes inspirés du *modèle transformation des connaissances* élaboré par Scardamalia et Bereiter (1987, 1998). En étudiant les processus mis en place par des rédacteurs experts et non experts [2] ces deux auteurs ont souligné les interactions entre deux espaces problèmes lors de la rédaction d'un texte :

> *"[La] caractéristique principale est l'existence de deux espaces-problèmes interconnectés, un espace qui concerne les problèmes de la connaissance du domaine (l'espace du contenu) et l'autre (l'espace rhétorique) concernant les probèmes relatifs au texte en cours de redaction."* (1998, p. 31).

1. Nous proposons dans la conclusion de la partie III, en résultat de notre expérimentation, des modèles effectifs en réponse à ces modèles théoriques.

2. L'expertise en rédaction se mesure par la capacité de faire appel à des configurations complexes et spécifiques de la tâche en jeu et à leur capacité à accéder aux informations pertinentes à propos de cette même tâche (Scardamalia & Bereiter, 1998, p. 14).

Les auteurs définissent ainsi deux espaces problèmes qui se répondent lors de la rédaction d'un texte (Figure 8.1, p. 128) :

– L'espace problème rhétorique, relatif au texte en cours de rédaction ;
– L'espace problème du contenu, relatif au domaine de connaissances en jeu.

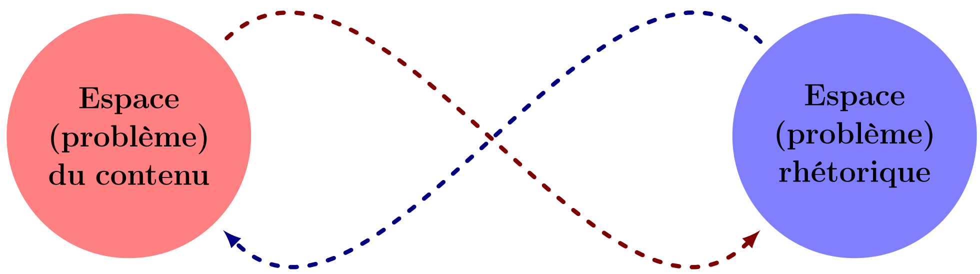


FIGURE 8.1 – Espaces problèmes dans la rédaction d'un texte

Dans le cadre d'un fonctionnement non-expert cette interaction se traduit par des processus qui permettent *l'expression des connaissances* (Modèle proposé en annexe C, Figure C.1, p. 264). Dans le cadre d'un fonctionnement expert, les processus mis en place imposent une véritable transformation des connaissances du rédacteur (Modèle proposé en annexe C, Figure C.2, p. 265). Selon Scardamalia & Bereiter cette transformation des connaissances résulte d'un transfert d'un espace problème à l'autre. Ils indiquent qu'en *"général, les résultats obtenus à partir de l'espace du contenu sont transférés dans l'espace rhétorique en tant que but. Par exemple, la décision prise dans l'espace du contenu [peut être] transformée en but réthorique."* (Scardamalia & Bereiter, 1998, p. 31). Les deux auteurs font l'hypothèse que lors de la rédaction d'un texte, il se crée des interactions entre les deux espaces qui conduisent à la mise en jeu de fonctions cognitives élevées et à une transformation des connaissances en jeu dans les deux domaines. Parmi les illustrations proposées nous pouvons citer, par exemple, que *la nécessité réthorique de construire une transition reliant des sous-thèmes peut entraîner la découverte d'une relation préalablement distinguée* (Ibid, p. 33).

Les recherches réalisées par Marlène Scardamalia et Carl Bereiter nous permettent d'envisager l'interaction entre récit et problèmes en les considérant comme deux espaces problèmes. Nous produisons ainsi un premier modèle d'interaction qui prend en charge les processus relatifs à l'activité narrative et à la construction d'un raisonnement (Section 8.1). En nous appuyant sur le modèle produit, nous interrogeons le rôle de ces interactions sur le milieu didactique relatif à une situation de résolution de problèmes. Les analyses du milieu didactique proposé par Margolinas (1998) et Hersant (2010a, 2010b) nous permettent de développer deux modèles d'interaction du récit avec le milieu didactique (Section 8.2).

8.1 Modèle d'interaction des processus

Dans les les chapitres 5 et 6 de notre document de thèse, nous avons défini les objets *problème* (p. 91) et *récit* (p. 111). Nous en avons proposé une modélistion au travers de trois composantes symétriques (Figure 8.2) :

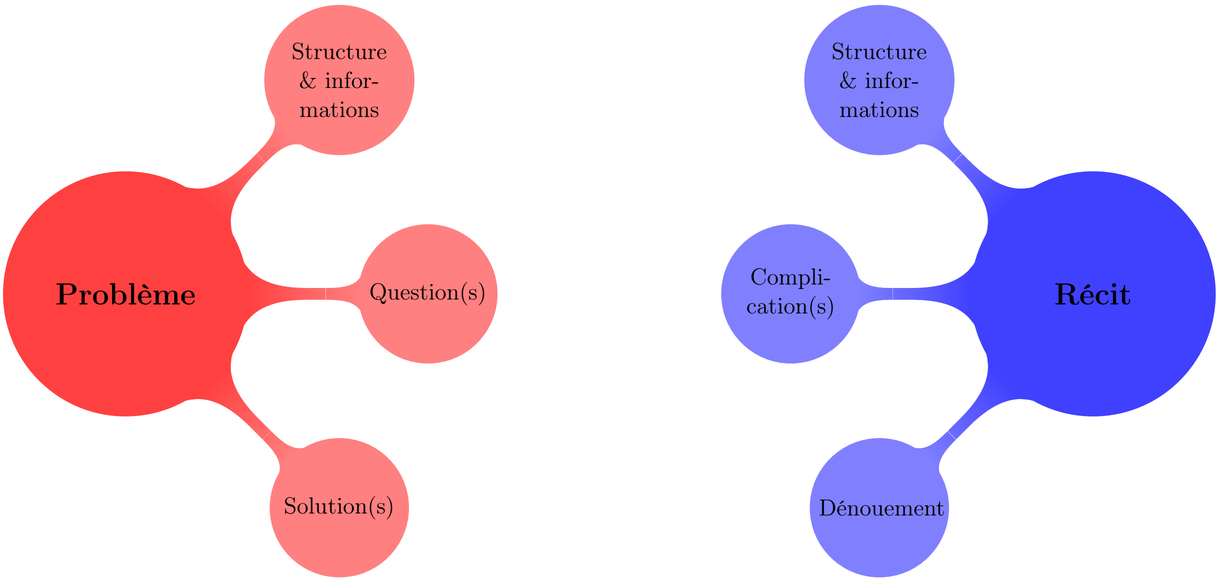


FIGURE 8.2 – Composantes principales des objets Problème et Récit

- **La structure** interne qui apparaît (sans être forcément entièrement définie) au travers de la donnée des **informations explicites** et de leurs relations (temporelles, logiques, etc.). Dans un récit, une partie importante de ces informations peut être proposée lors de l'exposé de l'état initial, dans un problème scolaire elles sont présentés dans l'énoncé. Les **informations implicites** qui complètent la situation sont à déterminer par le résolveur lors de la résolution du problème et par le récepteur du texte lors de sa lecture du récit.

- **L'élément problématique** qui est à l'origine de la construction du problème et du récit. Il est généralement présenté sous forme d'une ou plusieurs **questions** dans un problème scolaire. Il apparaît sous forme d'une **complication** grâce un élément perturbateur dans le récit et permet la construction de l'intrigue.

- **Le(s) élément(s) de solution**, construits en réponse à l'élément interrogatif. Ils consiste(nt) en la résolution de l'intrigue et à un état final stable, le **dénouement**, dans un récit et à la (aux) réponse(s) aux questions du problème lorsqu'elle(s) existe(nt), la (les) **solution(s)**.

8.1.1 Construction de deux espaces problèmes

En nous inscrivant dans le cadre proposé par Scardamalia et Bereiter (1987, 1998) nous considérons, de manière naturelle, ces deux objets et leurs composantes comme les deux espaces problèmes de notre modèle :

- **Le Problème de mathématiques est assimilé à l'espace du contenu.** Nous prenons ici le mot *problème* dans son sens global tel que nous l'avons défini, c'est à dire l'énoncé du problème mais aussi sa résolution et sa (ses) solution(s) lorsqu'elle(s) existe(nt). Les processus de traitement des trois composantes se fait par élaboration d'un raisonnement (Figure 8.3).

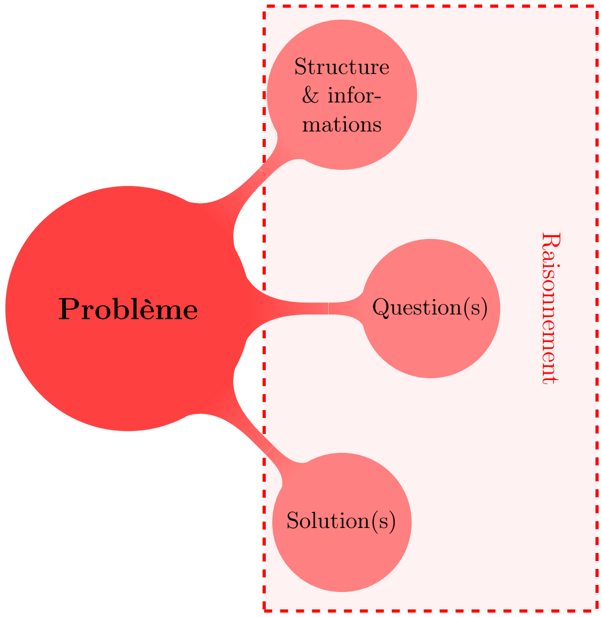


FIGURE 8.3 – Espace problème du contenu mathématique

- **Le Récit est considéré comme un espace probléme rhétorique.** Tout comme pour le problème, nous considérons le récit au sens large, c'est à dire l'objet récit ainsi que les processus cognitifs liés à la construction d'un récit. Le traitement des trois composantes est réalisé via la narration qui correspond à l'acte de construction du récit (Figure 8.4, p. 131).

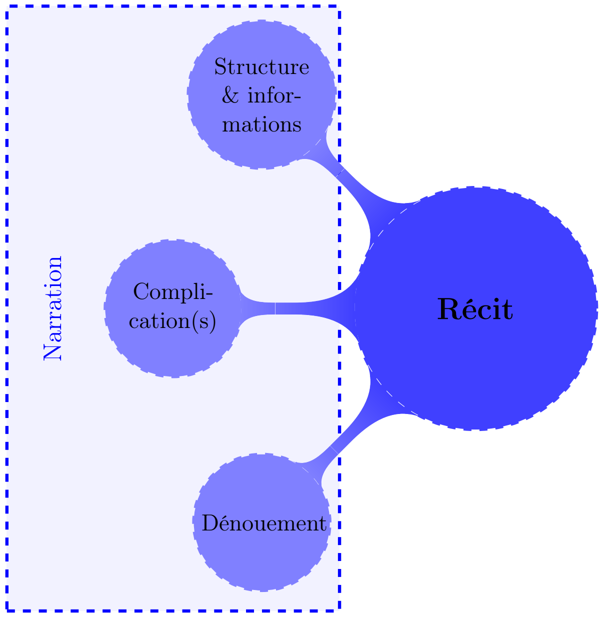


FIGURE 8.4 – Espace problème rhétorique du récit

La mise en tension des ces deux espaces problèmes va, selon le modèle de Scardamalia et Bereiter (1998), provoquer une interaction des processus. Dans le cadre d'une résolution de problèmes au travers de la construction d'un récit, les processus relatifs au raisonnement (dans l'espace problème du contenu) et les processus relatifs à la narration (dans l'espace problème rhétorique) interagissent. Nous pouvons faire l'hypothèse, explicitée dans le point suivant, **que raisonnement et narration se co-construisent au travers d'un transfert de processus d'un espace problème à l'autre.**

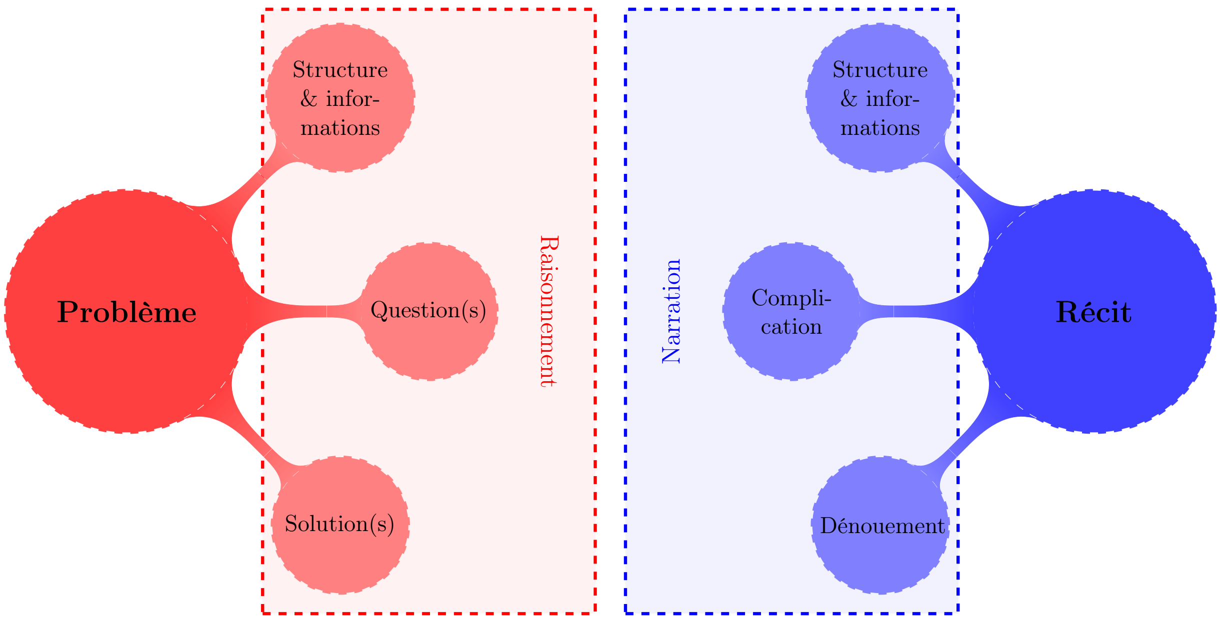


FIGURE 8.5 – Rencontre des processus relatifs aux deux espaces problèmes

8.1.2 Mise en tension des processus

Dans le chapitre 5, en référence notament aux travaux de Pólya (1945, 1994), nous avons considéré la résolution de problèmes comme une activité heuristique. En nous intéressant au traitement des trois composantes (structure, question, solution) nous avons mis en évidence plusieurs types de processus (Modèle p. 108) :

– des processus structurants et modélisants participant au traitement de la structure et des informations ;
– des processus d'élaboration et de mise en tension d'informations participant à la problématisation ;
– des processus d'explication participant à la détermination (en termes de valeurs et de preuves) de la solution.

En nous appuyant sur les travaux de Bruner (2005, 2006, 2008) et Eco (1985, 1996) nous avons mis en évidence des fonctions structurantes, problématisantes, explicatives relatives au récit dans le chapitre 7. En considérant le récit comme un mode de pensée, la production d'un récit amène le rédacteur à convoquer des processus cognitifs lors du traitement de la structure, de la complication et du dénouement du récit. Ces procesus s'inscrivent dans trois fonctions définies et caractérisées dans le chapitre 7 (p. 125).

1. **Fonction structurante :** La mise en récit permet en effet de prendre en charge des objets et facilite leur mise en relation. En permettant de construire un tout cohérent, le récit peut jouer un rôle structurant dans l'organisation des connaissances et dans l'articulation des phénomènes. Le récit facilite ainsi la compréhension de systèmes complexes.

2. **Fonction problématisante :** Il n'y a pas de récit sans intrigue et donc sans problématisation. La mise en place de l'intrigue, via un élément perturbateur, peut être comparée à la construction d'un problème. Elle invite par conséquent à réconsidérer les connaissances en jeu et à adopter une démarche de problématisation.

3. **Fonction explicative :** Le récit, à travers la fiction, permet de construire des explications. Celles-ci s'inscrivent dans des "mondes possibles" qui, de par leur nature, prennent en charge toutes les contraintes portées par le récit et par la situation de référence. Les explications produites respectent par conséquent ces mêmes contraintes.

Ces trois fonctions du récit sont relatives à la mise en place de processus relatifs à la construction et à la compréhension de récit. Du fait de leur construction et de leurs caractéristiques, les deux systèmes de processus font écho l'un à l'autre. C'est cette similitude qui nous permet d'envisager un transfert de processus d'un espace problème à l'autre. Pour chacun des processus que nous avons décrits dans le chapitre 5 nous pouvons associer un équivalent dans le cadre de l'espace problème du récit.

Ainsi, les processus de structuration des données peuvent s'apparenter à une structuration de texte et mettre en jeu les fonctions structurantes du récit. Imaginons par exemple un élève qui traite les données du problème auquel il est confronté en construisant un récit. Les nécessités rhétoriques relatives au récit vont lui imposer d'une part d'organiser ses données dans le temps et d'autre part de mettre en évidence des relations entre les informations. La structuration, amenée par le récit et visible dans les mots de liaison employés sera le reflet de la compréhension (même partielle) du problème par l'élève. Les relations repérées par l'élève au préalable vont apparaître dans le récit, accompagnées de nouvelles relations que l'élève pourra avoir découvert lors de son écriture. De même, les processus permettant d'associer des informations, de déterminer des manques et d'émettre des conjectures (processsus d'élaboration) peuvent se réinterpreter dans le cadre du récit. La construction d'une intrigue impose de considérer les informations disponibles pour répondre à une question. Enfin les processus de construction d'explications relatifs à la justification et à la production d'une preuve peuvent s'inscrire dans le cadre d'une construction de possibles explicatifs et de mondes alternatifs permise par la dimension fictionnelle du récit.

Dans les deux espaces problèmes, nous considérons chaque processus comme une réponse à un problème local (problème de contenu et / ou rhétorique). Les similitudes que nous venons de définir sont par conséquent des *lieux de rencontre* potentiels entre l'activité de résolution de problème et l'activité de construction de récit. Il est possible de transférer (moyennant quelques modifications), en accord avec le modèle proposé par Scardamalia et Bereiter (1998), chaque problème local posé et le processus qui lui correspond d'un espace problème à l'autre. Autrement dit, **chacun des processus inhérents à la résolution de problème peut théoriquement se réinterpréter et se réaliser dans l'espace rhétorique lié à la construction de récit. La co-construction entre raisonnement et narration est alors envisageable.**

8.1.3 Modèle d'interprétation de l'interaction des processus : transfert d'un espace problème à l'autre

Cette mise en parallèle nous permet d'**associer aux processus de construction de raisonnement en résolution de problèmes, des fonctions heuristiques relatives habituellement au récit**. Nous envisageons la co-construction entre raisonnement et narration comme la possibilité de réaliser les processus relatifs à la résolution d'un problème dans l'espace rhétorique de la construction de récit. Si nous reprenons le schéma proposé dans la figure 8.5, nous pouvons fusionner les deux espaces originellement séparés, celui du raisonnement et celui de la narration en un espace unique permettant le transfert des processus (Figure 8.6, p. 134).

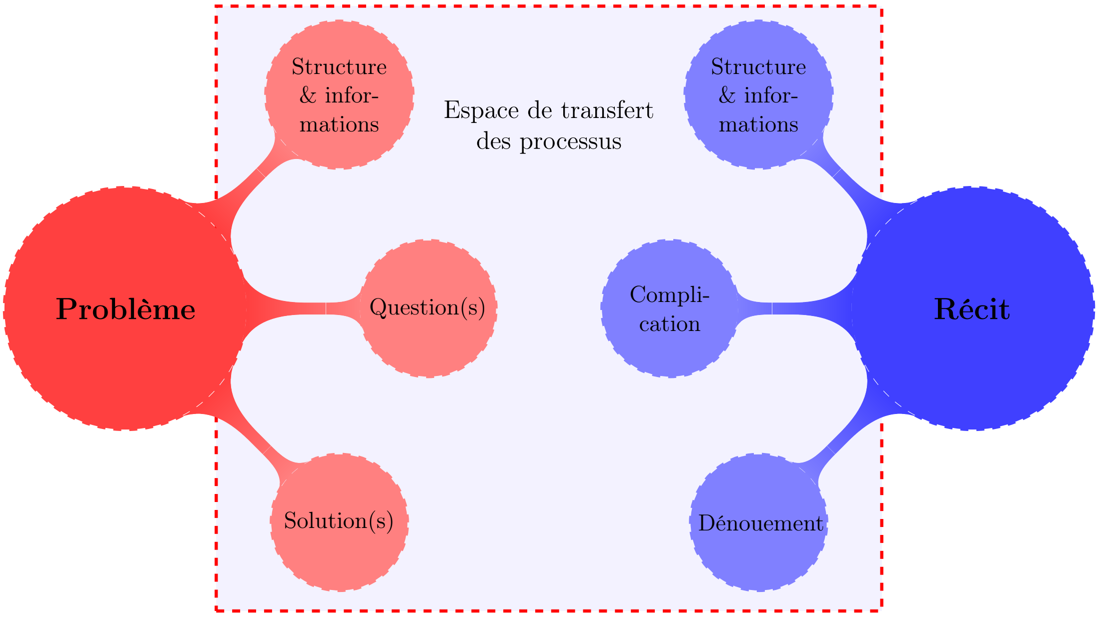


FIGURE 8.6 – Espace de tranfert des processus

Sous certaines conditions, que nous expliciterons dans la partie III de notre thèse, il est possible de mettre en place cet espace de transfert. Ainsi, l'activité de résolution de problèmes peut être, en partie, portée par des fonctions structurantes et heuristiques du récit. La construction d'un tel espace de transfert va être déterminée par la mise en place d'un milieu didactique dans lequel le récit occupe une place à la fois structurante et contraignante.

8.2 Modèles d'interaction du récit avec le milieu didactique

La définition la plus communément retenue pour le concept de milieu est construite par rapport au sujet apprenant. Il s'agit alors de considérer, en tant que système antagoniste de l'élève, *tout ce qui agit sur l'élève ou sur ce quoi l'élève agit* (Brousseau, 1998, p. 32). Pour que l'élève puisse agir sur lui et pour réagir en retour, le milieu possède différentes caractéristiques pourtant, come le souligne Hersant, *c'est le plus souvent la propriété de milieu antagoniste qui est employée à propos du milieu* (2010b, p. 44).

8.2.1 Contraignance du milieu et construction de preuve

Pour effectivement jouer un rôle dans les apprentissages en particulier dans la construction de raisonnement, le milieu possède trois propriétés fondamentales. Il est :

Rétroactif : Il a la *capacité de renvoyer à l'élève des rétroactions qui lui permettent de valider ou invalider ses propositions* (p. 43).

Proactif : *Les connaissances nécessaires pour entrer dans la situation sont disponibles chez les élèves (...) les connaissances nécessaires à l'action [sont] dans le milieu initial de la situation* (p. 43).

Contraignant : *Capacité à permettre l'apparition de la connaissance souhaitée tout en contraignant l'activité des élèves de façon à éviter la dispersion des connaissances (correctes ou erronées) produites et ainsi faciliter la validation* (p. 44).

Pour distinguer ces propriétés, Hersant a étudié l'intervention du *registre des faits* (registre empirique) et du *registre des nécessités* (registre apordictique) [3] dans la résolution de problème, particulièrement lors de la construction de preuves (Hersant, 2010a). Elle s'intéresse de fait à la propriété de contraignance qui est, selon elle, *essentielle pour le développement de situations de preuve* (2010b, p. 44). Après avoir souligné la faiblesse de certaines situations à ce niveau, elle propose deux manières d'enrichir le milieu didactique (Hersant, 2010b, p. 45-46) et ainsi augmenter la contraignance :

- Enrichissement du registre empirique ;
- Enrichissement du registre des nécessités.

Dans les deux cas, il s'agit d'enrichir le milieu pour amener la nécessité de preuve. Le récit, de par ses caractéristiques, va nous permettre d'agir dans les deux cas.

8.2.2 Modèle d'enrichissement du milieu didactique par le récit

Le récit est un objet de communication. Il est destiné à être partagé. En confrontant un récit au jugement des pairs, son producteur est amené sur un espace de négociation. Cet espace de négociation permet une inscription dans le *registre du doute* (Hersant, 2010b, p. 46) qui impose alors la nécessité d'une preuve. Ainsi, la diffusion d'un récit peut apporter à l'élève le besoin de prouver ses résultats. Dans notre recherche, il ne s'agit pas de renforcer le registre du doute via des aspects de communication. En inscrivant le récit dans une situation de résolution de problèmes nous souhaitons enrichir, au sens proposé par Hersant, le milieu didactique.

3. Hersant emprunte ces expressions à C. Orange (2001) qui met en tension registre empirique, registre des nécessités et registre des modèles dans le cadre de la problématisation. Tout comme Hersant, nous nous concentrons dans notre travail sur les deux premiers registres.

Registre empirique : Le récit, en particulier via la fiction amène la possibilité de construire des mondes alternatifs. Ceux-ci peuvent mettre en jeu une situation réelle légérement modifiée, une situation complètement fictive ou une situation plus intermédiaire. Quelque soit le cas, les *mondes possibles*[4] engendrés par la construction d'un récit enrichissent le *registre empirique* porté par le milieu. En effet, même en proposant une situation fictive, le récit est porteur d'un exemple qui peut être considéré et ce même s'il ne s'est pas effectivement réalisé. Il est ainsi possible de s'affranchir de la réalité, tout en restant dans un monde concret, voire sensible et comme précisé dans le point suivant, respectant les caractéristiques de la situation.

Registre des nécessités : Le récit est un objet structuré dont la construction est régie par une organisation nécessairement logique. Lorsque celle-ci n'est pas conforme à la réalité, les variations sont nécessairement explicites. Tout ce qui n'est pas présenté comme discordant est analogue à la réalité. De fait, les mondes possibles que nous évoquions ci-dessus sont soumis à la logique du récit mais aussi à celle de la situation dans laquelle ils sont construits. Chaque décision prise dans la construction du récit peut permettre de considérer ou de déterminer une nécessité relative à la situation. La création de nouveaux récits participe donc à l'enrichissement du *registre des nécessités*.

Ainsi, en participant à l'enrichissement de ces deux registres essentiels à la contraignance du milieu didactique le récit peut renforcer la nécessité de la preuve. Nous pouvons dire que le récit construit s'inscrit dans le milieu didactique et permet potentiellement de l'enrichir d'un point de vue relatif au registre empirique. La narration et l'étude du récit permettent à leur manière l'action sur le milieu et se saisissent nécessairement des contraintes de ce celui-ci. L'action du récit va alors prendre différentes formes, action ou rétroaction, et ce comme nous allons le voir ci-après à différents niveaux de la structuration du milieu proposée par Brousseau (1988) et Margolinas (1998).

8.2.3 Structuration du milieu du point de vue de l'élève

À la suite de Brousseau (1988), Margolinas (1998) propose de structurer le milieu en différentes couches emboitées. À partir du niveau zéro correspondant à la situation didactique et au milieu d'apprentissage (S0 et M0) elle développe "vers le haut" une succession de *couches extérieures*, symbolisées *par des indices positifs, avec lesquels (...) le professeur interagit de façon privilégiée* et "vers le bas une succession de *couches intérieures* symbolisées *par des indices négatifs, avec lesquels l'élève interagit de façon privilégiée* (1998, p. 7).

Lors de la construction d'un raisonnement, l'élève navigue entre les niveaux intérieurs (représentés dans la figure 8.7) qui sont emboîtés les uns dans les autres :

4. Concept proposé par Hintikka (1989)

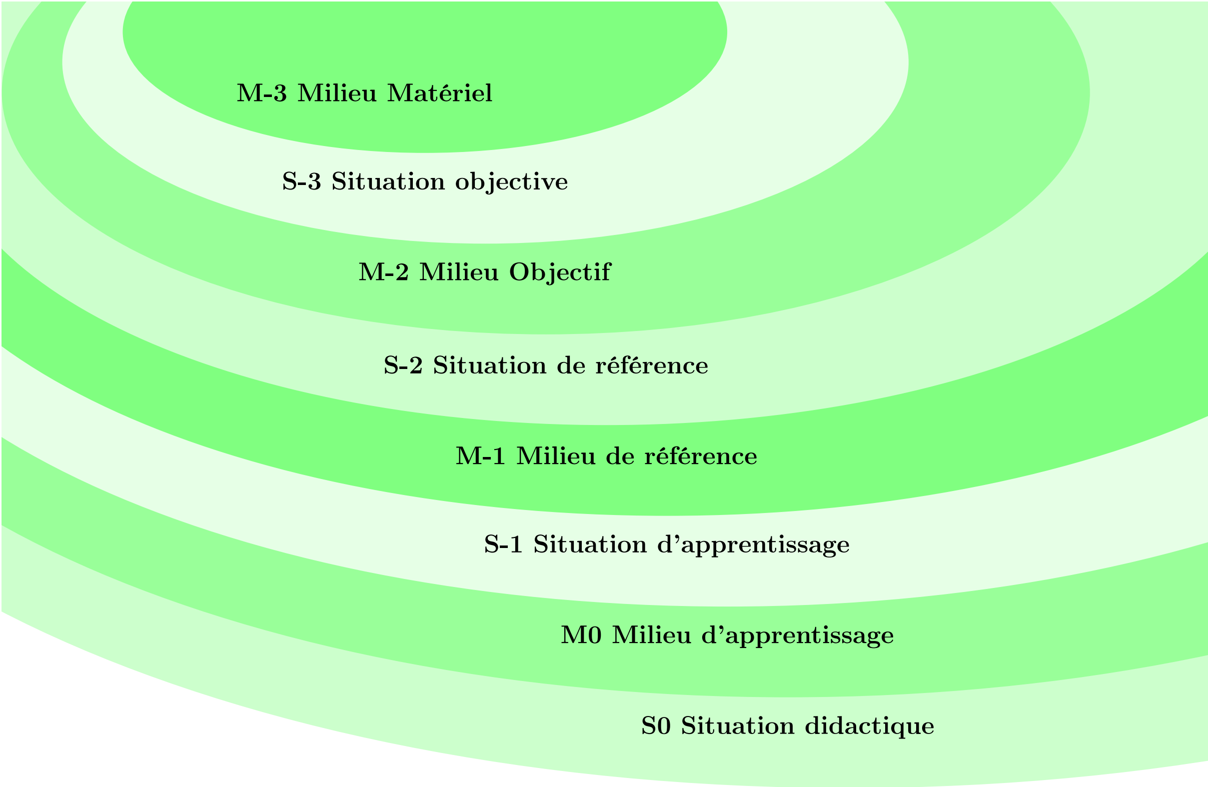


FIGURE 8.7 – Structure des milieux intérieurs

– Le **milieu matériel (M-3)** correspond aux objets (matériels et conceptuels) disponibles pour l'élève et qui lui permettent d'entrer dans le problème. La situation objective correspond à une situation d'action réduite au minimum.

– Le **milieu objectif (M-2)** correspond aux objets avec lesquels l'élève établit un rapport localement stable issu de la situation objective. La situation de référence est alors une situation où l'élève peut explorer et repérer, par exemple, des régularités.

– Le **milieu de référence (M-1)** contient les "absences" de la situation de référence. Ce sont ces dernières que l'élève doit déterminer. La situation d'apprentissage (S-1) lui permet de faire des essais.

À partir de cette structuration du milieu, il est possible d'envisager différentes formes et différents niveaux d'interaction du récit avec le milieu didactique.

8.2.4 Modèle d'actions du récit sur les niveaux de structuration du milieu

Au vu des caractéristiques des différents niveaux, il nous semble qu'il existe deux lieux d'interaction privilégiés entre le milieu et le récit :

- Le passage du niveau -3 au niveau -2 : Celui-ci impose d'établir un rapport objectif avec les informations et les objets disponibles. En complément d'une relation directe et spontanée, l'élève se positionne par rapport aux objets qu'il sélectionne et construit alors un rapport stabilisé. C'est alors le caractère structurant du récit qui entrerait en jeu. On pourrait penser que l'on propose ici l'établissement d'un récit global incluant les informations et les objets matériels pour organiser les objets, il n'en est rien. On peut imaginer une multitude de récits relatifs à chacun des objets en jeu et c'est la comparaison structurelle de ces récits qui permettrait de repérer des régularités et des différences.

- Le passage du niveau -2 au niveau -1 : Celui-ci amène l'élève à chercher pourquoi il existe des similitudes et / ou des incohérences dans la structure du milieu qu'il a pu déterminer. Il entre alors dans une démarche créative de propositions et de tests qu'il peut ajuster en fonction des réactions du milieu. La narration peut alors permettre à l'élève de s'éloigner des milieux matériels et objectifs grâce à son caractère fictionnel.

Nous ne proposons pas ici d'exemples précis de ces interactions, nous les développerons lors de l'analyse *a priori* de notre expérimentation (Partie III, Chapitre 10).

Conclusion : Inscription du récit dans le milieu didactique

Dans cette seconde partie, nous avons produit un travail de modélisation à différents niveaux. Un premier en nous concentrant sur les deux objets à la base de notre étude : le *problème* et le *récit*. Nous avons construit ces modélisations symétriquement en mettant en évidence trois composantes – la structure, l'élément problématique et les éléments de solution – autour desquelles se mettent en place les processus relatifs à la résolution d'un problème et à la construction d'un récit. La symétrie des deux modélisations nous a permis de considérer un second niveau de modélisation : l'interaction entre les activités relatives à chacun de ces objets. La construction et la résolution d'une intrigue permettent de prendre en charge des processus de structuration, de problématisation et d'explication qui font écho à l'activité de résolution de problèmes. La construction de trois modèles d'interaction nous permet à la fois de construire notre approche de la résolution de problèmes au travers du récit.

Du fait de ses caractéristiques, le récit peut être intégré en tant que composante essentielle du milieu didactique et jouer un rôle dans la construction d'un raisonnement. En partant d'un postulat de similitude entre les objets récit et problème, nous avons mis en évidence la possibilité d'une interaction forte entre les activités relatives au récit et à la résolution de problèmes. Grâce au modèle de Scardamalia et Bereiter (1998), **nous proposons l'hypothèse d'un transfert de processus d'un espace problème à l'autre**.

Par rapport au milieu didactique, nous pouvons formuler trois hypothèses relatives à l'action du récit :

– **Le récit enrichit, notamment grâce à la fiction, le registre empirique grâce aux possibles, réels et fictionnels, qu'il permet d'exprimer. Le récit, de par son caractère structurant, contribue à la définition de la structure de la situation par l'élève en lui permettant de déterminer et d'exprimer les contraintes en jeu. Il participe, de fait, à la dévolution de la preuve.**

– **De plus, le récit participe à la circulation de l'élève entre les différents niveaux structurels du milieu didactique (milieu matériel, milieu objectif et milieu de référence) et de le faire entrer dans un processus de preuve.**

– **Enfin, en tant qu'objet de communication, il prolonge l'action du milieu en apportant la possibilité de le mettre à l'épreuve des pairs.**

Troisième partie

Etude expérimentale des apports du récit en résolution de problèmes : Élaboration d'un milieu didactique permettant la prise en charge de raisonnements au travers du récit

Dans la réalisation de notre travail de thèse, nous nous sommes fixé deux objectifs :

- **D'un point de vue théorique, nous souhaitons déterminer les conditions et les enjeux d'une rencontre entre construction de récit et résolution de problèmes.** Nous avons donc développé des modèles théoriques nous permettant d'anticiper les possibilités d'interactions entre deux activités : la construction d'un récit de fiction et la résolution d'un problème de mathématiques. En proposant une modélisation symétrique du problème (Chapitre 5) et du récit (Chapitres 6), nous avons mis en évidence qu'il existait des processus communs entre les deux activités (Chapitre 8). En nous appuyant sur les travaux de Scardamalia et Bereiter (1998), nous avons envisagé la possibilité d'un transfert de processus entre *l'espace-problème réthorique* (relatif à la construction d'un récit) et *l'espace-problème du contenu* (relatif au problème de mathématique) [5]. Ce travail nous a amenés à considérer l'action du récit au travers de la caractérisation du milieu didactique.
- **D'un point de vue méthodologique, nous cherchons à déterminer les contraintes inhérentes à l'élaboration d'un milieu didactique permettant l'interaction entre construction de récit et résolution de problèmes.** Nous avons envisagé plusieurs niveaux d'interaction du récit avec le milieu didactique et construit des modèles permettant de les analyser (Chapitre 8). En considérant le récit comme un mode de pensée [6], nous envisageons la possibilité, sous certaines conditions, d'une résolution de problème qui se construirait à la fois dans l'espace-problème du récit et du contenu de façon interactive.

Dans cette troisième partie, nous explorons cette possibilité de co-construction grâce à une approche expérimentale en nous inscrivant dans le cadre méthodologique de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988). Nous avons imaginé une situation et élaboré différentes activités de résolution de problèmes qui nous permettent de mettre à l'épreuve les modèles et hypothèses développés dans la première partie de notre document de thèse. En nous appuyant sur le cadre théorique présenté dans la partie II, nous avons déterminé une série de contraintes pour construire notre milieu didactique et élaborer notre situation :

- **La situation** proposée aux élèves doit permettre l'entrée dans une démarche d'écriture de récit et de résolution de problèmes. Sa structure doit par conséquent pouvoir être explorée du point de vue du récit et du point de vue des mathématiques ;

- **L'élément problématique** doit pouvoir s'interpréter du point de vue du récit et du point de vue des mathématiques. La construction de l'intrigue doit s'inscrire comme une question dans le problème. Inversement toute question posée par le problème doit imposer des contraintes dans la construction de l'intrigue et du récit ;

- **La solution** du problème, tout en étant correcte mathématiquement, doit être conforme à la logique du récit et s'inscrire dans la résolution de l'intrigue. De même,

5. Nous empruntons ces deux expressions à Scardamalia et Bereiter, auteurs de *L'expertise en lecture-rédaction* (Scardamalia & Bereiter, 1998).

6. La construction d'un récit convoque des processus heuristiques et structurants que nous avons décrits dans le chapitre 7. La mise en œuvre de ces processus permet de convoquer des *fonctions du récit* relatives à la problématisation.

la résolution de l'intrigue doit être conforme aux contraintes mathématiques.

De par ce contexte, nous avons choisi de construire notre situation autour d'un jeu connu des élèves. Ainsi, dans un premier temps, les élèves sont acteurs de la situation ce qui leur permet, dans un second temps, d'entrer dans une démarche de construction de récit en racontant des parties effectivement jouées puis des parties imaginaires. De plus, structurée par les règles du jeu, la situation définie à partir de ce jeu possède une architecture mathématique et logique forte qui répond aux contraintes que nous avons déterminées. Dans notre travail, nous ne nous intéressons donc pas au jeu pour lui même. Nous l'utilisons comme un support pour construire une situation permettant l'interaction entre récit et problème de mathématiques. Dans cette partie nous analysons cette situation, en particulier sa structure mathématique et le milieu didactique qu'elle porte.

Le premier chapitre de cette seconde partie (Chapitre 9) sera par conséquent consacré à la construction de notre situation à partir du jeu. Nous débutons par un bref cadrage théorique puis nous présentons le jeu choisi et en expliquons les règles. Nous poursuivons en mettant en évidence les caractéristiques de la situation qu'elle permet de construire, du point de vue des mathématiques et du récit. Enfin nous contextualisons le modèle d'interaction entre récit et problème que nous avons élaboré dans la partie II, par rapport à notre expérimentation, en y inscrivant le jeu.

Nous poursuivons par un chapitre de présentation et d'analyse des activités de résolution de problèmes construites sur cette situation (Chapitre 10). Lors de cette *analyse a priori* de notre séquence exprimentale, outre les variables relatives aux mathématiques nous nous attachons à mettre en évidence les variables relatives au récit. Grâce à cela nous sommes en mesure d'anticiper :

– Le(s) type(s) de récit(s) que les élèves peuvent produire ;
– La structure des récits possibles et impossibles pour chaque situation ;
– Les fonctions du récit mises en jeu.

Ainsi, nous pouvons caractériser le milieu didactique et en nous appuyant sur les modèles construits dans la partie précedente (Chapitre 8) les potentialités d'interaction entre construction de récit et raisonnement.

Enfin (Chapitre 11), nous procédons à l'analyse *a posteriori* de notre expérimentation. Nous présentons dans ce même chapitre notre terrain d'expérimentation. En analysant les productions des élèves relativement à chaque tâche et dans leur interaction, nous sommes en mesure de mettre en évidence différents apports du récit dans l'activité de résolution de problèmes. Ainsi, dans la conclusion de cette troisième partie, nous produisons, en réponse aux modèles théoriques élaborés dans la seconde partie de notre thèse, des modélisations effectives des interactions entre résolution de problèmes et construction de récits.

Chapitre 9

Proposition, à partir d'un jeu, d'une situation permettant la résolution de problèmes via la construction de récits

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de cette partie, nous souhaitons construire une situation particulière pour tester notre problématique et nos hypothèses. Cette situation mathématique doit permettre aux élèves d'entrer dans une démarche d'écriture de récit. Pour cela, il nous semble essentiel que les élèves puissent, au moins dans un premier temps, vivre et agir sur la situation, même de manière partielle. Ainsi, en se basant sur leur expérience, il leur est possible de produire un premier récit simplement en racontant ce à quoi ils ont assisté. Par la suite, il ne s'agira plus seulement de raconter des faits passés et existants mais d'en construire de nouveaux, constituant autant de possibles, grâce au récit afin de répondre à des problèmes de mathématiques. Pour cette première raison, et d'autres que nous expliquons dans ce chapitre, nous avons choisi de construire notre situation à partir d'un jeu.

La question des liens entre jeu et apprentissage est récurrente dans le monde de l'éducation. Brougère dans *Jeu et éducation* (1995) puis dans *Jouer / Apprendre* (2005) fait un point sur les recherches internationales s'intéressant à cette problématique. Un des constats principaux de ces deux ouvrages est qu'il n'existe pas de définition consensuelle du mot *jeu*. Brougère souligne qu'il *"qu'il n'y a pas un savoir unifié sur le jeu, qu'au sein même des différentes disciplines, les discours restent pluriels. (...) Les discours sur le jeu sont loin d'avoir transformé ce terme en véritable concept"* (2005, p. 33). Il insiste par ailleurs sur la diversité et les ambiguïtés présentes dans l'usage même du terme dans l'activité et dans les théories du jeu (2005, p. 16). Pelay (2010) souligne qu'il existe un débat pour clarifier le lien entre la théorie des situations et la théorie des jeux, car peu de recherches ont utilisé explicitement la théorie des jeux pour modéliser ou concevoir des situations. Si pour Brousseau (1998) l'idée du jeu semble essentielle dans la modélisation des situations, Margolinas (1993) souligne la difficulté à justifier l'utilisation de cette théorie du point de vue de l'ingénierie didactique et de l'analyse de situations (1993, p. 57) mais admet cependant que *"l'idée du jeu a pu être utile pour la théorie des situations"* (1993, p. 58).

Dans notre travail, nous ne nous intéressons pas directement au concept de jeu, ni à ses relations avec l'apprentissage. Notre lecture de ces travaux et le compte-rendu que nous en faisons dans cette introduction vise à nommer, *a posteriori*, les caractéristiques du jeu que nous avons utilisées dans la construction de notre situation. Comme nous venons de le souligner au travers des propos de Brougère, le mot *jeu*, si commun soit-il, se voit attribuer une multitude de sens. Brousseau, qui s'appuie sur un modèle de jeu pour décrire et analyser les situations qu'il propose, souligne la polysémie de ce mot et en donne cinq définitions (1998, p. 82) :

1. *Activité physique ou mentale purement gratuite, généralement fondée sur la convention ou la fiction, qui n'a dans la conscience de celui qui s'y livre d'autre fin qu'elle même, d'autre but que le plaisir qu'elle procure.*
2. *Le jeu est l'organisation de cette activité sous un système de règles définissant un succès et un échec, un gain et une perte.*
3. *C'est aussi (. . .) ce qui sert à jouer, les instruments du jeu.*
4. *C'est parfois la manière dont on joue, le "play". Dans le cas où il s'agira de procédures (...) [Brousseau préférera] les termes de tactique ou de stratégie.*
5. *C'est enfin l'ensemble des propositions entre lesquelles le joueur peut choisir dans un état donné du jeu (au sens de la définition 2).*

Le deuxième définition *"Le jeu est l'organisation de cette activité sous un système de règles définissant un succès et un échec, un gain et une perte."* est particulièrement significative dans notre construction expérimentale. En effet, ce que nous recherchons dans le jeu c'est un potentiel pour bâtir une situation qui soit structurée logiquement et mathématiquement. Les règles du jeu permettent par exemple de différencier les modalités d'une même situation et de déterminer *a priori* les résultats d'un évènement, voire d'une suite d'évènements. À ce propos, en rappelant les propos de Vygotsky qui affirme *"il n'existe pas de jeu sans règle"*, Brougère insiste sur le fait que c'est *"la règle qui organise la décision"* (2005, p. 54). Les règles du jeu sont en fait un ensemble de conventions et de normes acceptées localement par les joueurs. En ce sens, le jeu possède une structure propre qui est déterminée par avance et qui doit être respectée. Par conséquent, en considérant le jeu comme un système organisé (en succès, échecs, gains, pertes ou autre), nous sommes en mesure de réinterpréter les règles du jeu du point de vue des mathématiques et du récit. Les contraintes imposées par le jeu, via les règles du jeu, permettent alors de définir une situation entièrement structurée.

Nous ne pouvons pas terminer cette introduction sans évoquer la dimension ludique relative à la notion de *jeu*. Selon Pelay, *"il existe une dimension objectivable de l'activité ludique. Les potentialités ludiques d'une situation didactique peuvent être identifiées a priori, et sont articulées avec les potentialités mathématiques de la situation didactique"* (2010, p. 55). Dans notre recherche, ce que nous cherchons à caractériser *a priori* ce n'est pas cette dimension ludique mais la structuration logique du milieu didactique qui est imposée par les règles du jeu.

Nous centrons donc notre présentation du jeu choisi sur la description des règles du jeu (Section 9.1). L'analyse et l'interprétation mathématique de ces règles nous permettent de définir la structure interne de la situation de jeu, une *axiomatique locale* (Tarski, 1960) à l'interieur de laquelle il est possible de raisonner (Section 9.2). Nous complétons cette structure grâce à la proposition et l'analyse de contraintes externes qui seront reprises dans notre expérimentation sous forme de consignes (Section 9.3). Nous mettons en évidence que ces contraintes externes constituent de véritables variables didactiques qui nous permettent de construire et d'organiser notre milieu didactique. Nous montrons ensuite comment il est effectivement possible de s'inscrire dans cette situation pour produire différents types de récits, en réponse à des problèmes posés par ces contraintes externes (Section 9.4). Enfin, nous concluons ce chapitre en proposant une version contextualisée de notre modélisation des interactions entre récit et problèmes en relation avec le milieu didactique ainsi produit (Section 9.5).

9.1 Présentation du jeu à la base de la construction de la structure de notre situation

Le jeu que nous avons choisi pour l'élaboration de notre expérimentation est un jeu de toupies dans lequel deux joueurs s'affrontent pour gagner des points. Ce jeu se joue à deux joueurs durant plusieurs manches. Chacun des joueurs dispose d'une toupie (Figure 9.1). À chaque manche, les joueurs lancent leurs toupies dans un stadium (Figure 9.2) et gagnent ou perdent des points selon les règles du jeu présentées ci-après.

FIGURE 9.1 – Toupies

FIGURE 9.2 – Stadium

9.1.1 Règles du jeu définissant le déroulement d'une manche

La partie est découpée en manches. Au signal, les deux joueurs lancent leur toupie dans le stadium en même temps. Si un joueur lance sa toupie à coté du stadium, il perd la manche. Si les deux toupies atterissent dans le stadium, c'est le début de la manche. La manche se termine dès que :

1. un joueur touche le stadium ;
2. une des toupies n'est plus dans le stadium ;
3. une des toupies est en zone de pénalité ;
4. une des toupies ne tourne plus.

Le premier joueur qui se retrouve dans une de ces situations perd la manche. S'il n'est pas possible de déterminer un perdant, et par conséquent un vainqueur, la manche est annulée puis rejouée. Cela peut être le cas si les deux toupies arrêtent de tourner en même temps par exemple. Lorsque la manche est terminée, les points sont distribués.

9.1.2 Règles d'attribution des points et désignation du vainqueur

Une fois la manche terminée, des points sont distribués ou retirés à un seul des deux joueurs. Pour cela, il faut attribuer les points en appliquant les règles suivantes dans l'ordre ci-dessous (dès qu'un point est distribué ou retiré, les joueurs se préparent pour la manche suivante) :

– 1	pour le joueur qui lance sa toupie à côté du stadium ;
– 3	pour le joueur qui touche le stadium pendant la manche ;
+ 3	pour le joueur qui éjecte la toupie de son adversaire hors du stadium ;
+ 2	pour le joueur qui coince la toupie adverse dans la zone de pénalité ;
+ 1	pour le joueur dont la toupie tourne plus longtemps que celle de son adversaire tout en restant dans le stadium.

Il n'y a donc qu'un seul joueur qui gagne ou perd des points à chaque manche. Il est également possible d'avoir un score négatif. Lorsqu'un joueur marque des points, il remporte la manche, l'autre joueur est déclaré perdant. À l'inverse lorsqu'un joueur perd des points, il est déclaré perdant et l'autre joueur vainqueur. Il faut noter que le joueur dont le score reste fixe peut être perdant ou gagnant selon les manches.

La partie se termine lorsqu'un joueur atteint 7 points (ou plus). **Le premier joueur qui obtient un score supérieur ou égal à 7 points gagne la partie.**

9.1.3 Règles du jeu organisées en tant que système

Les règles du jeu telles qu'elles sont définies ici s'organisent en un système qui détermine le succès (local et global), l'échec, des gains et des pertes. Tout évènement qui se déroule dans le cadre du jeu peut alors être sanctionné d'un résultat. À l'intérieur d'un espace spatio-temporel délimité, celui de la partie de toupies, il est possible d'envisager différents scénarios (des successions de manches), plus ou moins complexes, permettant de passer du début de la partie (situation initiale où les deux joueurs ont un score égal à zéro) à la fin de la partie (situation finale où un des joueurs a un score supérieur ou égal à sept points). Le déroulement de ce scénario se conforme aux règles du jeu qui permettent de déterminer localement (à chaque manche) les points attribués.

D'une manière plus globale les règles du jeu se présentent comme des contraintes internes à la situation. Les scénarios que l'on pourrait envisager *a priori* ne sont pas tous conformes aux règles du jeu. Les règles locales (l'attribution des points à chaque manche) sont complétées par des règles plus globales (la désignation du vainqueur, le déroulement des manches). Elles fixent ce qu'il est possible et impossible de faire du point de vue du déroulement global de la partie. C'est ce système de contraintes que nous tâchons de déterminer dans le point suivant grâce à une analyse mathématique et logique des règles du jeu en tant que système organisé. Nous construisons ainsi une axiomatique locale – un système d'axiomes et de théorèmes à l'intérieur duquel il est possible de raisonner –qui prépare la structuration de notre situation didactique.

9.2 Analyse mathématique et logique des règles du jeu : détermination d'une axiomatique locale

Dans les deux sections suivantes nous analysons les contraintes mathématiques et logiques qui peuvent être mises en jeu dans la construction de notre situation. Nous l'avons dit dans l'introduction de ce chapitre, nous travaillons sur deux types de contraintes :

- D'une part, **des contraintes que nous avons qualifiées d'internes car elles découlent directement des règles du jeu.** Elles ne peuvent pas être modifiées (sauf en cas de changement dans les règles du jeu) et sont présentes en permanence. Nous les analysons dans cette section.

- D'autre part, **des contraintes que nous avons qualifiées d'externes car si elles permettent d'agir sur la situation, elles n'en sont pas directement dépendantes.** Elles interviennent dans la situation lorsque nous faisons le choix de les imposer via une consigne. Nous les analysons dans la section suivante (9.3) comme des variables didactiques dans la construction de notre milieu.

Par souci de clarté, nous ne présentons pas ici l'intégralité des démonstrations mathématiques réalisées. Nous proposons une version en langage naturel de la structure de ces démonstrations ainsi qu'une référence vers une démonstration formelle (Annexe D, p. 267).

9.2.1 Éléments théoriques

Sans entrer dans tous les détails de la théorie des modèles et du concept de vérité proposés par Tarski [1], nous présentons comme il le dit lui même dans son ouvrage *Introduction à la logique* "*les principaux fondamentaux qui doivent s'appliquer dans la construction de la logique et des mathématiques*" (1960, p. 109). C'est à l'intérieur de ce cadre théorique et méthodologique que nous déterminons notre axiomatique locale. Dans le sixième chapitre intulé *"la méthode déductive"*, Tarski caractérise les quatre constituants élémentaires d'un raisonnement logique valide [2] dans une discipline choisie :

Les termes primitifs ou termes non-définis : *Petit groupe d'expression de cette discipline qui nous paraissent immédiatement compréhensibles*. Il n'est alors pas nécessaire d'en expliquer le sens ;

Les termes définis : Ce sont les termes déterminés grâce aux termes primitifs. La **définition** est alors l'action qui permet de construire des termes définis à partir de termes primitifs. Dans un second temps il est également possible de définir des termes en utilisant également des termes préalablements définis de cette manière. ;

Les axiomes ou énoncés primitifs : Ce sont des *énoncés* [ie : des propositions] *de la discipline (...) qui ont pour nous les apparences de l'évidence. (...) Ils sont acceptés comme vrais sans établir leur validité.* ;

les théorèmes ou énoncés prouvés : Ce sont les énoncés construits en n'employant *rien d'autre que les énoncés de cette discipline [dont la veracité] a été établie antérieurement* dont les axiomes font partie. Le procédé qui consiste à établir ces énoncés prouvés est bien évidemment une **démonstration**.

Sur un exemple concret, Tarski met en place ce qu'il appelle une *théorie déductive en miniature* (p. 114). En s'appuyant sur deux termes primitifs et deux axiomes, il détermine un système axiomatique en construisant plusieurs théorèmes qui sont, de fait, immédiatement validés. Durand-Guerrier et Diaz (2005) s'inscrivent dans ce cadre théorique et méthodologique pour travailler sur la notion de preuve en mathématiques. Leur expérimentation se base sur une situation régie par ce qu'ils appellent *une axiomatique locale*

1. Pour plus d'informations à ce sujet nous faisons référence aux travaux de Tarski *Logique, sémantique et mathématiques* Volume 1 (1936) et 2 (1944), *Introduction à la logique* (1060) et *Logique, sémantique et mathématiques* (1972) ainsi qu'à ceux de Durand-Guerrier (2005) qui étudie en détail les ouvrages de Tarski et qui montre comment ses théories peuvent permettre de réinterpreter et d'éclairer l'étude de la démonstration.

2. Tarski souligne dans ce même chapitre qu'il n'est pas possible d'atteindre l'idéal de preuve et de vérité universelle. Il propose donc un compromis pour établir plus localement la validité d'un énoncé (Tarski, 1960, p. 110).

minimale, ou encore une mini-théorie déductive au sens de Tarski. En se basant sur deux axiomes uniquement, ils démontrent qu'il existe au plus cinq polyèdres réguliers. À la manière de ces deux auteurs, nous interprétons notre situation au travers de la détermination d'une structure axiomatique. Ainsi, nous pourrons considérer notre situation comme un ensemble de termes (primitifs ou définis), d'axiomes et de théorèmes à l'intérieur duquel il est possible de raisonner. Au moment de l'analyse *a priori* de notre expérimentation, nous nous basons sur cette structure pour caractériser notre milieu didactique et déterminer *a priori* en fonctions des contraintes proposées ce qui est possible, impossible, nécessaire, accessoire, vrai, faux, etc. À titre exemple nous énonçons ci-dessous les trois théorèmes principaux de notre situation :

– Il est nécessaire de jouer au moins trois manches pour terminer une partie.
– Il est possible de jouer un nombre infini de manches sans jamais terminer une partie.
– Le vainqueur d'une partie peut atteindre uniquement un score de 7, 8 ou 9 points.

9.2.2 Choix des termes et des énoncés primitifs

Définir la structure axiomatique de notre situation revient à déterminer ce qu'il est possible et impossible d'obtenir lors d'une partie au niveau :
– du nombre de manches ;
– des scores du vainqueur et du perdant ;
– des scores intermédiaires.

Dans chaque partie, les règles du jeu permettent de définir les différentes valeurs relatives à ces objets, leurs variations et leurs relations. Ce sont donc ces objets (nombre de manches, scores du vainqueur et du perdant, scores intermédiaires) que nous allons utiliser en tant que termes primitifs. Les règles du jeu, ou du moins leur équivalent mathématique, seront nos axiomes.

Termes primitifs et termes définis :

Dans notre situation, les termes primitifs correspondent aux scores des deux joueurs ainsi qu'au nombre de manches écoulées :

Scores $(s_1 , s_2) \in \mathbb{Z}^2$ **:** Un vecteur à deux composantes correspondant aux scores respectifs des deux joueurs (joueur 1 et joueur 2). La valeur de chacun des scores s_1, s_2 peut être positive ou négative.

Nombre de manches $n \in \mathbb{N}$ **:** Une valeur positive correspondant au nombre de manches jouées dans une partie.

Dans la suite de ce document, nous noterons : ($s_{1,n}$; $s_{2,n}$) le score des deux joueurs à la manche n. Par exemple, au début de toutes les parties, les deux joueurs ont un score égal à zéro : ($s_{1,0}$; $s_{2,0}$) = (0 ; 0).

À chaque manche, le score d'un des deux joueurs varie alors que l'autre reste fixe. Il est alors possible de définir :

- ◇ $\mathbb{P}$ l'ensemble des valeurs correspondant aux variations de scores possibles pour les deux joueurs : $\mathbb{P} = \{ -3 \; ; \; -1 \; ; 0 \; ; \; 1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \}$. Le score d'un des joueurs reste fixe, la variation est donc nulle. Le score de l'autre joueur peut diminer de 1 ou 3 points ou augmenter de 1, 2 ou 3 points.
- ◇ $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des valeurs correspondant aux scores possibles pour chacun des joueurs à la manche n. On a bien évidement $\mathbb{S}_0 = \{0\}$, $\mathbb{S}_1 = \mathbb{P}$ et à chaque manche n, $\mathbb{S}_n = \bigoplus_{p=1}^{n} \mathbb{P}$.
- ◇ $S_i = (s_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des scores du joueur i (l'indice i désigne le joueur 1 ou le joueur 2, $i \in \{1;2\}$) qui est telle que : $\forall \; k \in \mathbb{N}$ et $\forall \; i \in \mathbb{N}$, $s_{i,k} \in \mathbb{S}_k$. La suite de scores prend ses valeurs dans les ensembles définis ci-dessus.

Axiomes :

Les axiomes sont, quant à eux, déterminés par les règles du jeu telles que nous les avons définies (p. 148). Elles déterminent les conditions de victoire, les conditions de fin d'une manche, les gains et les pertes des joueurs à chaque manche. En fixant ce qu'il est possible et impossible de faire, ces règles nous permettent de définir immédiatement 2 axiomes. Nous les formulons ci-dessous :

```
 A1 : Il faut atteindre au moins 7 points pour terminer une partie.
 A2 : A chaque manche, le score d'un des deux joueurs varie de -3,
-1, 1, 2 ou 3 points, celui de l'autre joueur reste inchangé.
```

Ces deux axiomes peuvent s'interpréter en utilisant les termes primitifs que nous avons choisis :

A1 :

"La partie est terminée à la manche N"

$$\Leftrightarrow \exists \; i \in \{1;2\} \text{ tel que } s_{i,N} \geq 7.$$

A2 :

$$\forall \; n \in \mathbb{N}, \; \exists! \; i \in \{1;2\} \text{ tel que } s_{i,n} \in s_{i,n-1} \oplus \mathbb{P}^*.$$

De plus, si on note $k = 3 - i$ on a $s_{k,n} = s_{k,n-1}$

Pour faciliter la compréhension et la manipulation de ces axiomes, nous "partageons" l'axiome **A2** en trois sous-axiomes notés **A3**, **A4** et **A5** :

A3 : À chaque manche, le score d'un des deux joueurs varie de -3, -1, 1, 2 ou 3 points. **A4** : À chaque manche, un seul des deux joueurs peut gagner ou perdre des points. Le score de l'autre joueur reste inchangé. **A5** : Les scores des joueurs varient au maximum de trois points par manche (en positif ou négatif).

A3 :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \exists !\ i \in \{1;2\} \texttt{ tel que}$$

$$s_{i,n} \neq s_{i,n-1} \texttt{ et } s_{i,n} \in\ \mathbb{S}_{i,n-1} \oplus \mathbb{P}^*$$

A4 :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \exists !\ k \in \{1;2\},\ k \neq i,\ \texttt{tel que } s_{k,n} = s_{k,n-1}$$

A5 :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ i \in \{1;2\},\ s_{i,n-1} + m \leq s_{i,n} \leq s_{i,n-1} + M$$

$$\texttt{avec } m = min\ (\ \mathbb{P}\ ) = -3 \texttt{ et } M = max\ (\ \mathbb{P}\ ) = 3.$$

9.2.3 Construction des théorèmes

Comme nous l'avons indiqué, nous proposons ici une version allégée des démonstrations de ces théorèmes en langage naturel. Les démonstrations mathématiques sont développées en annexe D.

Théorème 1 (TH1) : Il faut jouer un minimum de trois manches pour terminer une partie.

Démonstration en annexe D, p. 267.

L'axiome **A2** nous indique les variations possibles des scores de chaque joueur. Nous en avons déduit l'axiome **A5** qui nous permet d'affirmer qu'il est possible de gagner au maximum trois points par manche. Ainsi pour atteindre un score de 7 points permettant de gagner une partie (axiome **A1**), il est nécessaire de jouer au minimum 3 manches. Voici un exemple de partie qui se termine en trois manches : Un des joueurs expulse la toupie de son adversaire du stadium deux fois de suite puis à la troisième manche sa toupie tourne plus longtemps. Il obtient bien 7 (3+3+1) points en trois manches ce qui termine la partie.

Théorème 2 (TH2) : `Il est possible de jouer un nombre illimité de manches sans jamais terminer une partie.`

Démonstration en annexe D, p. 268.

L'axiome **A2** nous permet d'affirmer qu'un joueur peut perdre des points. Ainsi, il est possible d'envisager une partie dans laquelle un des joueurs aurait un score fixe et l'autre joueur perdrait des points à chaque manche. Ainsi, aucun des deux joueurs n'atteindrait un score supérieur ou égal à 7 et ne pourrait donc gagner la partie. Une partie infinie pourrait être construite de la manière suivante : à chaque manche un des joueurs lance sa toupie à coté du stadium et perd donc un point. Aucun des deux joueurs n'atteindra jamais 7 points quel que soit le nombre de manches jouées.

Théorème 3 (TH3) : `Le score du vainqueur est égal à 7, 8 ou 9 points. Il ne peut pas être supérieur ou égal à 10 points.`

Démonstration en annexe D, p. 269.

S'il est clair que le score du perdant est majoré (par 6), il est moins évident de se rendre compte, à la lecture des règles du jeu que celui du vainqueur l'est aussi. Son score ne peut cependant pas excéder 9 points. En effet, lors d'une manche à laquelle la partie n'est pas encore finie, le futur vainqueur a au maximum 6 points. À la manche suivante, son score peut augmenter au maximum de 3 points. Par conséquent, le score du futur vainqueur aura une valeur maximale de 9 points. S'il n'atteint pas au moins 7 points, on peut réitérer le même raisonnement. S'il atteint un score supérieur ou égal à 7 points (mais inférieur ou égal à 9 points), la partie est terminée.

Nous avons proposé, pour le théorème 1, un exemple de partie où le vainqueur termine avec un score égal à 7. Il est également possible de construire des parties où le vainqueur termine avec 8 ou 9 points. Par exemple : une partie où un des joueurs marquerait 2 points à chaque manche en bloquant la toupie de son adversaire permettrait d'obtenir en quatre manches un score de 8 points. Une partie dans laquelle un des joueurs marquerait 3 points à chaque manche en expulsant à chaque fois la toupie de son adversaire hors du stadium permettrait d'obtenir une partie se terminant à 9 points.

Théorème 4 (TH4) : `Le vainqueur a gagné au minimum 3 manches dans la partie.`

Démonstration en annexe D, p. 269.

Le théorème 1 nous indique qu'il est nécessaire de jouer au moins trois manches pour terminer une partie. Nous précisons ce théorème en ajoutant que la partie ne peut se terminer que si un des deux joueurs gagne au moins trois manches dans la partie. Par le terme "gagner", nous entendons que le score du joueur augmente, c'est à dire qu'il gagne 1, 2 ou 3 points. Il lui faudra ainsi remporter un minimum de trois manches pour espérer atteindre les 7 points minimum. À noter que cela n'est bien évidemment pas suffisant.

> **Théorème 5 (TH5) :** Le score du perdant est minoré par $m \times (N-3)$ avec N le nombre de manches jouées et $m = min\ (\ \mathbb{P})\ = -3$.

Démonstration en annexe D, p. 270.

Grâce au théorème 4 et à l'axiome 4, nous pouvons affirmer que le score du perdant d'une partie ne peut varier au maximum que dans $N - 3$ manches avec N le nombre de manches jouées dans la partie. Par conséquent le score du perdant est minoré par un nombre dépendant du nombre de manches : $m \times (N - 3)$ avec $m = min\ (\ \mathbb{P}\ )$. De la même manière, nous pourrions également montrer le théorème 6 :

> **Théorème 6 (TH6) :** À chaque manche n, la valeur des scores des deux joueurs est comprise entre $n \times m = -3n$ avec $m = min(\mathbb{P}) = -3$ et $min\ (\ n \times M\ ,\ 9\ ) = min\ (\ 3n\ ,\ 9\ )$ avec $M = max(\mathbb{P}) = 3$.

Toute construction de raisonnement à l'intérieur de notre situation va être soumise au respect des théorèmes que nous venons de définir. Les élèves ont pour responsabilité de vérifier que leurs productions sont conformes au règles du jeu et respectent l'axiomatique locale ainsi définie. Il s'agit de contraintes internes dans le sens où elles sont inhérentes à toute situation reposant sur ce jeu. Elles sont fixées et non négociables. À l'inverse, dans la section suivante, nous nous intéressons à des contraintes que nous pouvons faire varier. Ces contraintes que nous avons qualifiées d'externes nous permettent de proposer des situations de résoution de problèmes inscrites dans la structure que nous venons de définir. Ces contraintes sont pour nous des variables qui nous permettent d'agir sur la construction du milieu didactique.

9.3 Analyse mathématique et logique de contraintes externes : élaboration de variables didactiques

Nous poursuivons dans cette section l'analyse de notre situation en mettant à l'étude une série de contraintes supplémentaires. Celles-ci portent sur les objets que nous avons définis comme nos termes primitifs (p. 151) : les scores et le nombre de manches. Nous caractérisons ces contraintes par la mise en évidence des variations qu'elles permettent d'introduire dans la construction d'un récit relatant une partie de jeu correspondant à ces contraintes. Dans le chapitre 10, nous présentons le déroulement de notre expérimentation et décrivons en détails les activités construites autour de ces contraintes ainsi que leur articulation. Notre objectif est ici d'analyser d'un point de vue mathématique les sous-situations relatives à chacune de ces contraintes. Nous associons à chaque variation de contrainte un ensemble de choix possibles et les parties qu'il est possible de construire.

Pour cela, nous procédons comme dans la section précédente en considérant chaque partie potentielle au travers de la suite des scores des deux joueurs : $(s_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Les règles du jeu dotant chaque action d'une évolution unique du score, chaque partie peut être mise en correspondance avec une et une seule suite de scores : $(s_{1,n}, s_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Les théorèmes 3, 4, 5 et 6 (construits et démontrés dans la section précédente) nous permettent de plus d'affirmer que ces suites de scores sont minorées et majorées relativement au nombre de manches effectuées. Si on note $(s_{v,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de scores du vainqueur et $(s_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ celle du perdant, alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ -3n \ \leq\ s_{v,n} \ \leq\ 9 \ \text{ et } -3n \ \leq\ s_{p,n} \ \leq\ 6$$

À chaque manche, le score du vainqueur de la partie est toujours inférieur à 9 points (Théorème 3, p. 154), celui du perdant est forcément inférieur ou égal à 6 (dans le cas contraire, il atteindrait un score supérieur ou égal à 7 et serait déclaré vainqueur). Le théorème 5 (p. 155) nous permet de minorer les scores des deux joueurs par une valeur qui dépend du nombre de manches jouées : $-3n$ qui correspond à une perte maximale, 3 points par manche. De plus, si la partie se termine à la manche N, le théorème 6 (p. 155) nous permet d'affirmer que les scores des joueurs s'inscrivent dans la relation suivante :

$$-3(N-3) \leq s_{p,N} < 7 \leq s_{v,N} \leq 9$$

À la fin de la partie (manche N), le score du perdant est inférieur à celui du vainqueur. Il est supérieur au score obtenu en perdant un maximum de points à toutes les manches sauf les trois (au minimum) où le futur vainqueur marque des points (Théorème 4, p.154).

De par la nature des objets en jeu (scores et nombres de manches) nous sommes en mesure de définir et d'analyser quatre types de contraintes externes :

1. Le nombre de manches peut être fixé, majoré ou minoré ;
2. Les scores des joueurs peuvent être fixés, majorés ou minorés à différents moments de la partie (au bout d'un nombre de manches précis, lorsque la partie est terminée) ;
3. L'évolution de la suite de scores peut être fixée (majorée ou minorée) à une ou plusieurs manches déterminées ;
4. Les scores des deux joueurs peuvent être liés par une relation imposée.

9.3.1 Contrainte sur le nombre de manches

La première contrainte que nous étudions concerne le nombre de manches de la partie à construire. Trois possibilités s'offrent à nous : fixer, majorer ou minorer le nombre de manches [3]. La valeur de ces diffrentes contraintes limite l'ensemble des parties possibles :

Nombre de manches fixé : La partie se termine en N manches

▷ Si on fixe $N < 3$:
Il n'est pas possible de construire une partie complète (Théorème 1, p. 153).

$$G,\ \text{l'ensemble des parties constructibles est vide . } G = \emptyset$$

▷ Si on fixe $N = 3$:
le vainqueur doit gagner toutes les manches (Théorème 4, p. 154). Il est possible de construire exactement dix parties. Nous les représentons sous forme d'un arbre de possibles dans la figure 9.3 (p. 161). Dans cette même figure, on peut également voir qu'il faut que le vainqueur gagne suffisament de points à chaque manche. Remporter trois manches n'est pas un critère suffisant pour atteindre sept points.

$$G,\ \text{l'ensemble des parties constructibles a un cardinal égal à 10 . } \#G = 10$$

▷ Si on fixe $N > 3$:
Le vainqueur doit gagner au moins trois manches (Théorème 4, p. 154). Il doit, comme nous l'avons indiqué ci-dessous, marquer suffisament de points. Plus la valeur de N est grande, plus il est possible de construire de parties.

3. Exemples :
– *Construire une partie qui se termine au bout de 7 manches.*
– *Construire une partie qui comporte moins de 5 manches.*
– *Construire une partie qui comporte au moins 8 manches.*

Nombre de manches maximum : La partie comporte N manches maximum

Une partie terminée comporte au minimum trois manches. Il n'est donc pas possible de fixer un nombre maximum de manche inférieur strictement à trois. Nous ne détaillons pas ici les conséquences d'une majoration du nombre de manches sur la construction de parties. Il ne s'agit en effet pas d'une contrainte très forte. Nous précisons seulement que plus le nombre de manches augmente, plus il est possible de constuire de parties.

Nombre de manches minimum : La partie comporte N manches minimum

Fixer un nombre minimum de manche inférieur ou égal à trois n'amène pas de contrainte sur la construction d'une partie. Un minimum de trois manches est en effet nécessaire pour terminer une partie (Théorème 1, p. 153). En revanche, imposer un nombre de manches minimum supérieur (ou égal) à quatre modifie l'ensemble des parties possibles.

La spécificité de cette contrainte se cristallise sur une valeur particulière : un minimum de sept manches :

▷ $4 \leq N \leq 7$; si le minimum de manches imposées est compris entre 4 et 7, il est possible qu'un joueur (le vainqueur) remporte toutes les manches. Autrement dit, on peut contruire une partie dans laquelle un même joueur gagne des points à chaque manche alors que l'autre joueur reste à un score constant de 0 points. Il existe 105 parties de ce type. Nous les avons représentées sur la figure 9.4 (p. 162).

▷ $7 < N$; si le nombre minimum de manches est strictement supérieur à 7, il est alors impossible qu'un seul joueur remporte toutes les manches. Si un joueur gagne toutes les manches, il marque au minimum 1 point par manche et la partie est alors forcément terminée au bout de 7 manches. Les 105 parties mentionnées ci-dessus ne font alors pas partie de l'espace des parties possibles.

9.3.2 Contrainte sur un score final ou intermédiaire

Lorsqu'on fixe un score à une manche k donnée (que cette manche soit la manche finale ou une manche intermédiaire), on fixe une des valeurs de la suite des scores du joueur. De fait, la construction de cette même suite est contrainte de proche en proche. Par exemple, si on fixe le score du joueur i à la manche k à une valeur de s, alors son score à la manche précédente est compris entre $s-3$ et $s+3$, son score à la manche suivante est compris entre les mêmes valeurs (Théorème 6, p. 155).

$$s-3 \leq s_{i,k-1} \leq s+3 \quad \text{et} \quad s-3 \leq s_{i,k+1} \leq s+3$$

La contrainte fixant un score final ou intérmédiaire permet de limiter l'espace des parties possibles. Il s'agit donc également d'une variable qui impose des choix dans la construction de la partie. Concernant la valeur s de ce score, il est évident que s est inférieur à 9 (Théorème 3, p. 154. De plus, si le nombre de manches k est également fixé alors la valeur du score dépend du nombre de manches, $-3k \leq s \leq 3k$ (Théorème 6, p. 155).

9.3.3 Contrainte sur le déroulement d'une manche

En lisant les règles du jeu (p. 148), on peut remarquer que chaque évènement correspond à une unique variation de score et inversement. Lorsqu'on fixe un évènement à une manche k donnée, on fixe une variation de la suite des scores des deux joueurs à cette même manche : Si on fixe la variation du joueur *1* à la manche k à une valeur V (non nulle mais qui peut être positive ou négative), alors pour les deux joueurs, les scores des manches k et $k-1$ sont liés.

$$s_{1,k} = s_{1,k-1} + V \text{ et } s_{2,k} = s_{2,k-1} \text{ (le score du joueur 2 reste fixe).}$$

Considérons à titre illustratif la contrainte suivante :

> **C :** À la seconde manche, le joueur 1 éjecte la toupie de son adversaire hors du stadium et gagne donc 3 points.

La contrainte **C** réduit l'espace des parties possibles à celles où le joueur 1 gagne trois points à la seconde manche. Combinée à d'autres, cette contrainte amène des restrictions dans l'ensemble des parties possibles. Par exemple, l'ensemble de contraintes, *raconter une partie dans laquelle l'évènement **C** a lieu et dans laquelle le joueur 1 gagne la partie en trois manches*, réduit l'espace des parties possibles à 6 possibilités (*Cf* figure 9.3, p 161). Ces contraintes fixent en effet la somme des transformations sur les deux autres manches qui doit être supérieure ou égale à 4.

9.3.4 Contrainte relationnelle entre les scores des joueurs

Il existe *a priori* dans notre situation deux liens entre les scores des joueurs :
- À une manche donnée, lorsque le score d'un des deux joueurs varie, celui de l'autre reste identique (Axiome 2, p. 152).
- Lorsque la partie est terminée à la manche N, $s_{p,N} < 7 \leq s_{v,N} \leq 9$ (*Cf.* p. 156).

Comme dans le cas précédent, en proposant des contraintes supplémentaires, il est possible de limiter l'espace des parties possibles. Sans prétendre expliciter toutes les variations de contraintes possibles, nous proposons ici deux exemples accompagnés de possibilités de constructions de parties répondant à ces contraintes :

- **C1 :** *Le joueur p est en tête ou à égalité avec le joueur v jusqu'à l'avant dernière manche mais il perd la partie.* À la première manche, la contrainte **C1** impose que le joueur p gagne (marque des points) ou que le joueur v perde des points pour que le joueur p commence la partie en tête. Par la suite, le score du joueur v ne devra jamais dépasser celui du joueur p. Il faudra également que le joueur p atteigne au moins 4 points pour que le joueur v puisse gagner en atteignant 7 points ou plus à la dernière manche.

- **C2 :** Le joueur p gagne plus de manches que le joueur v mais il perd la partie. La contrainte **C2** impose que les évènements, lorsqu'ils sont à l'avantage du joueur v lui permettent de gagner plusieurs points d'un coup. Ceux qui sont à l'avantage du joueur p ne doivent pas lui faire gagner beaucoup de points à la fois. Par exemple, le joueur p peut marquer 1 point par manche pendant 6 manches, puis le joueur v peut gagner 3 points par manche pendant 3 manches. Ainsi le joueur v gagne la partie en remportant seulement 3 manches alors que le joueur p en aura gagné 6.

9.3.5 Construction de variables didactiques

Les contraintes externes telles que nous les avons caractérisées dans cette section constituent de véritables variables didactiques. Dans la conclusion de ce chapitre (9.5), nous mettons explicitement en relation ces contraintes avec la détermination du milieu didactique lors d'une activité de résolution de problèmes au travers du récit. En préalable de cette explicitation, nous proposons dans le point suivant de définir les récits qu'il est possible de construire dans le cadre de notre situation.

FIGURE 9.3 – Arbres des possibles pour une partie terminée en 3 manches

Représentation des scores du vainqueur des trois manches

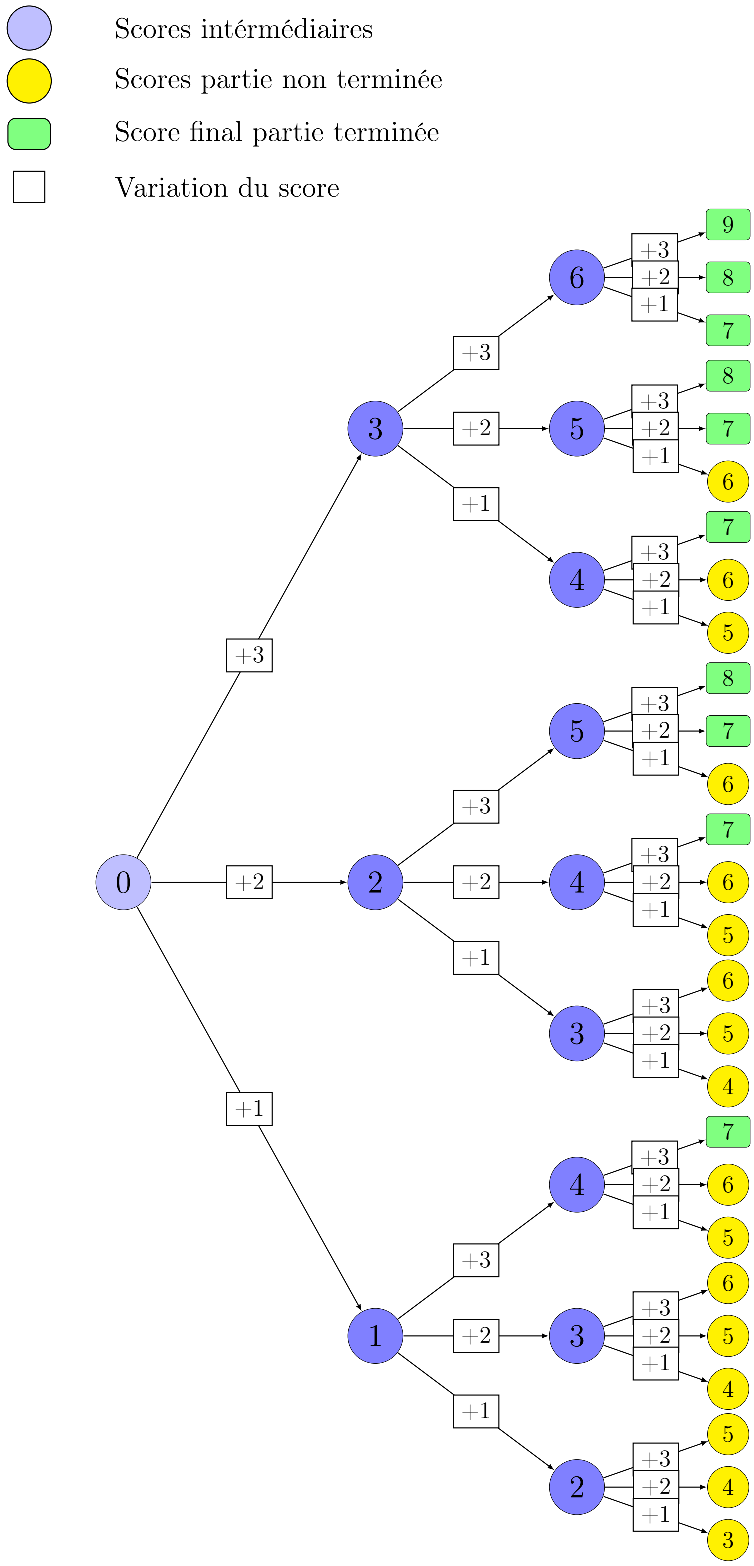
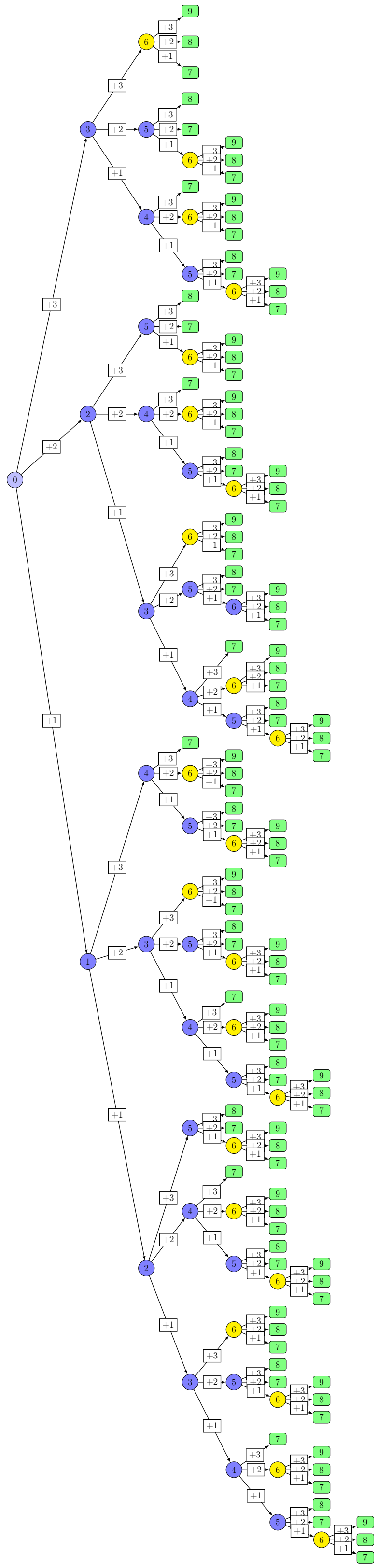


FIGURE 9.4 – Arbres des parties possibles lorsqu'un joueur gagne toutes les manches



9.4 Caractérisation de l'activité de construction de récits inscrits dans l'axiomatique locale

Dans cette section, nous nous intéressons spécifiquement aux récits qu'il est possible de construire dans le cadre de notre situation. Nous avons choisi d'adosser notre situation sur un jeu et c'est donc tout naturellement que les récits que nous souhaitons faire produire prennent la forme de récits de parties. Il peut s'agir de récits de parties effectivement réalisées qui seront des récits descriptifs et de récits de parties imaginées qui seront alors des récits d'anticipation. Dans les deux cas, les récits construits relatent le déroulement de la partie au travers de la succession des manches.

De par sa nature, le jeu est selon nous un très bon support pour la construction de récits. Brougère, dans sont ouvrage *Qu'est ce que le jeu ?* propose deux caractérisations du jeu qui nous permettent d'appuyer ce propos [4] :

- *La liberté du joueur (jouer c'est décider) :* Brougère cite Guerrien auteur de *La théorie des jeux* (1993) : *"Selon l'acceptation courante, un jeu est une situation où les individus (les joueurs) sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance (les règles du jeu), le résultat de ces choix constituant une issue du jeu, à laquelle est associé un gain, positif ou négatif pour chacun des participants"* (Guerrien, 1993, p. 5). Il poursuit en indiquant qu'un *"jeu peut ainsi être perçu comme une succession de décisions dans un univers ou le second degré confère une puissance extraordinaire à celles-ci"* (p. 53).

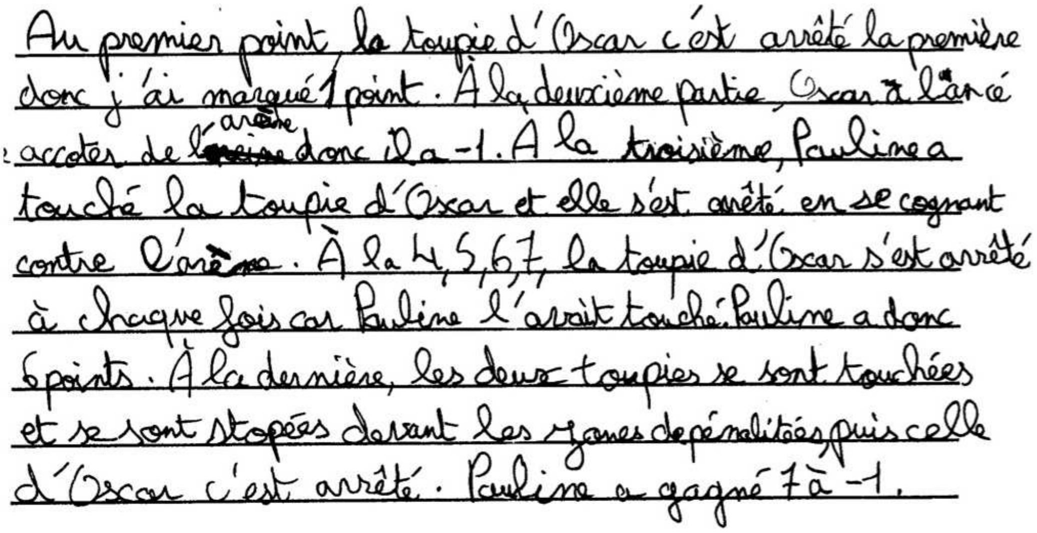
- *L'incertitude :* Il s'agit ici d'indiquer que la fin du jeu est reste inconnue tant que le jeu n'est pas terminé. Brougère indique que le *"scénario, même s'il est doté d'une trame préexistante, se construit au fur et à mesure du déroulement"* (p. 56).

Cette liberté du joueur, est également celle du producteur d'un récit de partie imaginaire. Selon les contraintes qui lui sont imposées, le rédacteur dispose d'une liberté (plus ou moins grande relativement aux valeurs de ces contraintes comme nous l'avons montré dans la section 9.3) pour faire des choix – comme le joueur dont parle Brougère – déterminant le déroulement de la partie et par conséquent le déroulement du récit. Au travers d'exemples choisis dans les productions des élèves avec lesquels nous avons travaillé, nous proposons dans les points suivants d'étudier les caractéristiques des récits qu'il est potentiellement et effectivement possible de construire.

4. Il en propose en fait cinq : le second degré, la liberté du joueur, les règles, la frivolité et l'incertitude. Nous retenons les deux caractérisations qui légitiment la relation que nous faisons entre jeu et construction de récits dans le cadre de notre situation.

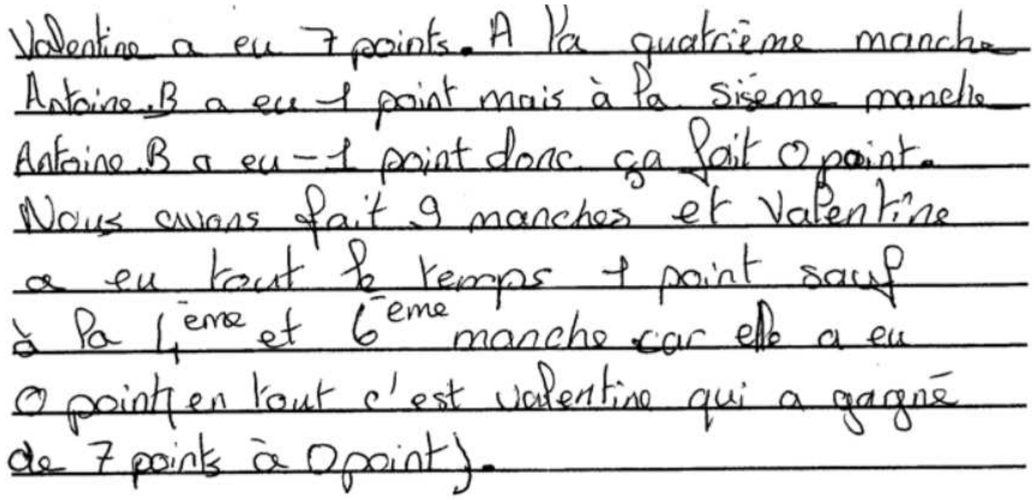
9.4.1 Éléments caractéristiques d'un récit de partie

Dans le chapitre 6, nous avons défini le récit comme une production, orale ou écrite, relatant une succession d'évènements organisés autour d'un élément problématique (p. 111). Nous avons précisé que les évènements dont il est question mettent en jeu des personnages et leurs actions dans un cadre spatio-temporel déterminé. Dans ce point, nous nous attachons à mettre en évidence la présence de ces caractéristiques dans le contexte de récits de parties. Nous proposons ci-dessous (Figures 9.5 et 9.6) deux productions d'élèves pour raconter une partie effectivement réalisée.



Au premier point la toupie d'Oscar c'est arrêté la première donc j'ai marqué 1 point. À la deuxième partie, Oscar a lancé accoter de l'arène donc il a -1. A la troisième, Pauline a touché la toupie d'Oscar et elle s'est arrêté en se cognant contre l'arène. À la 4, 5, 6, 7, la toupie d'Oscar s'est arrêté à chaque fois car Pauline l'avait touché. Pauline a donc 6 points. À la dernière, les deux toupies se sont touchées et se sont stopées devant les zones de pénalitées puis celle d'Oscar c'est arrêté. Pauline a gagné 7 à -1.

Figure 9.5 – Exemple de récit de partie : Oscar et Pauline



Valentine a eu 7 points. A la quatrième manche Antoine.B a eu 1 point mais à la sisème manche Antoine.B a eu -1 point donc ça fait 0 point. Nous avons fait 9 manches et Valentine a eu tout le temps 1 point sauf à la 1ème et 6ème manche car elle a eu 0 point (en tout c'est valentine qui a gagné de 7 points à 0 point).

Figure 9.6 – Exemple de récit de partie : Valentin et Antoine

Les deux productions ci-dessus sont construites autour d'une succession d'évènements qui relatent des différentes manches des parties jouées. Ils sont proposés suivant un ordre chronologique dans la première et non chronologique dans la seconde. Les personnages humains, représentants des élèves, sont accompagnés de personnages objets, les toupies.

Ces dernières semblent dotés d'une vie propre, elles se touchent, s'arrêtent, etc. Les personnages humains tout comme les personnages objets sont engagés dans des actions. Ils jouent, sont en mouvement, obtiennent des résultats [5]. Ces actions produisent des transformations particulièrement visibles dans l'évolution des scores. L'évolution est également marquée par des indicateurs de temps, rythmée par des mots tels que "à la troisième", "à la dernière", "tout le temps" qui structurent le temps [6]. Le cadre spatial est également défini. Les actions se déroulent autour et dans une arène / un stadium. Ce lieu est structuré en différents espaces ("dedans", "dehors", "zone de pénalité", etc.)

Ces deux textes (ainsi que les autres productions réalisées par les élèves pour raconter des parties réalisées) possèdent donc bien tous les marqueurs caractéristiques d'un récit excepté pour la présence d'un élément problématique interne à l'histoire. Il s'agit en fait de récits descriptifs organisés autour d'une problématique externe, la transmission d'informations. La contrainte donnée aux élèves était qu'une personne n'ayant pas assisté à la partie ait tout les renseignements nécessaires pour comprendre son déroulement. Cet exercice, le premier proposé aux élèves lors de notre expérimentation, était une manière de faire entrer les élèves dans une démarche d'écriture de récits. Dans la suite, les élèves ont produit des récits autour d'une problématique interne qui correspondent à la définition du récit que nous avons construite dans le chapitre 6. Ce sont ces récits que nous explorons dans la suite de notre thèse conformément à notre problématique (*Cf.* Chapitre 8) : des récits d'anticipation, produits dans le cadre d'une situation de résolution de problèmes.

De cette présentation de récits descriptifs, nous souhaitons retenir avant tout la caractérisation contextualisée des marqueurs du récit. Ce sont ces éléments qui nous permettent, dans notre expérimentation, de déterminer parmi les productions des élèves celles qui relèvent effectivement du récit. Dans la suite de notre thèse, nous considérons chacune des manches de la partie racontée (qu'elle soit réelle ou imaginaire) comme un *évènement* du récit. Dans le cadre de notre situation, il existe autant d'évènements pouvant être convoqués dans un récit que de manières de marquer des points durant une partie. Selon les règles du jeu (p. 148), il existe donc cinq événéments élémentaires. Ces évènements déterminent la structure de l'histoire [7]. D'un récit il est possible d'extraire une seule structure correspondant à une unique histoire. À l'inverse, en s'appuyant sur une histoire, une structure d'évènements, il est possible de construire plusieurs récits grâce à des choix narratifs différents. Ce sont ces variations que nous présentons dans le point suivant.

5. Dans certaines productions (Annexe G), les personnages expriment même des sentiments repérables par des mots tels que "heureusement" (figure G.2, p. 289) ou des signes de ponctuation tels que le point d'exclamation (figure G.3, p. 290).

6. Certains élèves ont même marqué la fin de leur production par le mot "fin" (Annexe G, figure G.1, p. 288) ou en signant leur production.

7. Nous prenons, ici comme dans toute notre thèse, le terme histoire dans le sens défini par Genette – l'ensemble des événéments rapportés – en opposition au récit qui correspond à l'énoncé narratif (*Cf.* Chapitre 6, p. 110).

9.4.2 Types de récits possibles

Nous définissons ici des types de récits en nous appuyant uniquement sur la description de notre situation. Nous proposerons, lors de l'analyse de notre expérimentation, une caractérisation au travers des processus de résolution de problèmes mis en jeu dans la production de ces récits.

Récits linéaires et récits structurés par des regroupements d'évènements

Nous l'avons vu dans le point précédent, le rédacteur d'un récit peut produire un récit qui respecte la chronologie des évènements (Figure 9.5) ou un récit structuré par des regroupements d'évènements (Figure 9.6). Il est ainsi possible d'opposer un **récit linéaire et chronologique** à un **récit structuré par des regroupements d'évènements**. Nous verrons dans la suite de notre travail l'importance de cette structure temporelle dans la construction de raisonnements.

Récits descriptifs et récits d'anticipation

Les récits proposés en exemple dans le point précédent se basent sur des parties effectivement jouées. Ce sont, comme nous l'avons dit, des **récits descriptifs**. Il est également envisageable d'inventer, dans le cadre de notre situation, un récit d'une partie qui n'a pas effectivement eu lieu. Il s'agira alors d'un **récit d'anticipation**. Dans notre expérimentation, les élèves les construisent en réponse à des problèmes que nous leur posons. Les deux récits reproduits ci-dessous ont étés construits en réponse à la consigne suivante : *"Raconter une partie dans laquelle le vainqueur termine avec 8 points"* :

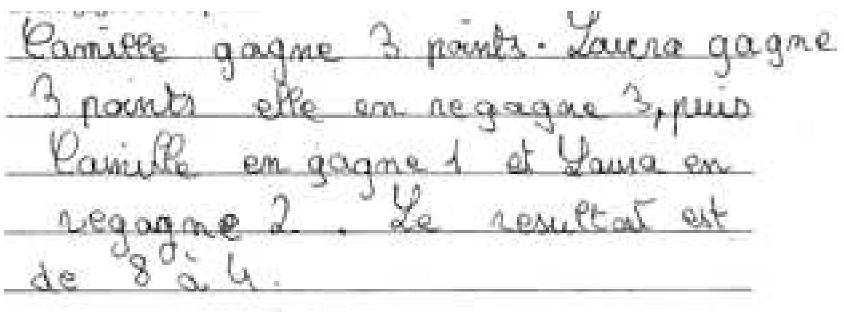
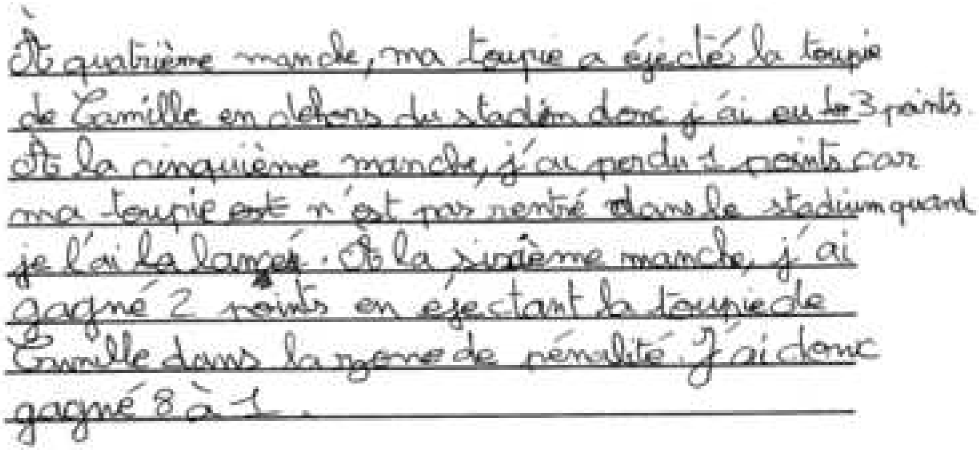

Camille gagne 3 points. Laura gagne
3 points elle en regagne 3, puis
Camille en gagne 1 et Laura en
regagne 2. Le resultat est
de 8 à 4.

FIGURE 9.7 – Exemple de récit d'anticipation - Proposition 1



À quatrième manche, ma toupie a éjecté la toupie
de Camille en dehors du stadium donc j'ai eu 3 points.
À la cinquième manche, j'ai perdu 1 points car
ma toupie ~~est~~ n'est pas rentré dans le stadium quand
je l'ai lancée. À la sixième manche, j'ai
gagné 2 points en éjectant la toupie de
Camille dans la zone de pénalité. J'ai donc
gagné 8 à 1.

FIGURE 9.8 – Exemple de récit d'anticipation - Proposition 2

La question posée par la consigne amène les élèves à construire une suite d'évènements. Contrairement aux récits descriptifs que nous avons présentés, ces deux récits sont organisés autour d'une problématique : comment obtenir un score de huits points ? À partir d'une situation initiale que nous avons décrite, nous introduisons un évènement problématique qui oblige le rédacteur du récit à faire des choix dans les évènements qui auraient pu se produire afin d'obtenir le résultat (le score de huit points constituant l'état final du récit) que nous avons demandé. Au delà de leur forme, les deux productions présentées sont donc effectivement des récits. Les contraintes que nous avons déterminées dans la section 9.3 nous permettent donc d'introduire dans des situations données, une problématique pouvant s'interpréter à la fois du point de vue des mathématiques et du récit. Pour la résoudre, le constructeur d'un récit procède à une mise en intrigue qui lui permet de sélectionner les évènements et de les organiser pour produire le résultat escompté. Nous développons cet aspect dans le point suivant en contextualisant le modèle d'interactions entre problème et récit que nous avons construit dans la partie II de notre thèse (Chapitre 8).

9.5 Conclusion : Contextualisation de notre modèle d'interactions entre récit et problèmes

Les récits produits par les élèves dans notre situation sont contraints bien évidemment par la consigne donnée (un score, un nombre de manches) mais également, et surtout, par les règles du jeu. Les récits, pour être valables, doivent s'inscrire dans la structure mathématique et logique de la situation. Nous montrons également sur plusieurs exemples, le rôle de cette structure dans la construction du milieu et du contrat didactique.

Dans la partie précédente, nous avons fait l'hypothèse d'une co-construction possible entre récit et raisonnement en situation de résolution de problèmes de mathématiques. Dans cette optique, nous avons souligné l'importance d'une inscription du récit dans le milieu didactique qui soit enrichissante, contraignante et opératoire pour les élèves :

- **Enrichissante** dans le sens où tout récit, une fois construit, pourra s'intégrer comme un exemple au milieu didactique et ainsi l'enrichir de nouvelles possibilités ;

- **Contraignante** c'est à dire que cette intégration amène chez les élèves la nécessité d'envisager et de produire une preuve de leurs résultats ;

- **Opératoire,** imposant ainsi au récit d'être manipulable par les élèves et leur apportant la possibilité de valider leurs résultats. Le récit est alors un outils permettant d'agir sur le milieu didactique.

Afin de tester cette hypothèse, nous avons construit une expérimentation qui nous permet de prendre en charge toutes ces dimensions. En nous basant sur la situation de jeu (de toupies) et de construction de récits, nous proposons le chapitre suivant différentes activités de résolution de problèmes de mathématiques invitant à la construction de récits. Ces activités, organisées dans une séquence envisagée pour des élèves de cycle 3, s'ancrent dans un milieu didactique où objets mathématiques et récits sont étroitement imbriqués. Ainsi, nous invitons les élèves à raisonner sur et à l'intérieur de cette structure pour la déterminer (du moins en partie) et résoudre des problèmes de mathématiques qui y sont liés.

Ils devront (pourront) pour cela construire des récits de parties (réelles ou imaginaires) qui seront soumis à trois types des contraintes (Figure 9.9) :

Contraintes de l'axiomatique locale : Ce sont les contraintes portée par la situation en elle-même. Nous les avons définies (p. 149) en nous appuyant sur les travaux de Durand-Guerrier (2005) et Durand-Guerrier et Diaz (2005). Dans notre contexte, elles définissent ce qu'il est possible ou non de faire lors de la réalisation ou de l'invention d'une partie. *Il s'agit par exemple du fait que le vainqueur d'une partie* *termine obligatoirement la partie avec 7 ou 8 ou 9 points.*

Contraintes internes au récit : Ce sont les contraintes imposées par la forme du récit. Ce dernier étant une production structurée (p. 111), il se doit de respecter notamment une logique interne de temps, de personnages et de lieu. Cette logique interne est donc elle aussi soumise à la structure de l'axiomatique locale.

Contraintes externes : Ce sont les contraintes imposées par la consigne.Il s'agit d'une ou plusieurs contrainte(s) supplémentaire(s) qui s'ajoute(nt) à celles de l'axiomatique locale. *Par exemple, imposer que le vainqueur gagne avec 8 points au lieu de laisser la possibilité qu'il termine à 7 ou 9 points.*

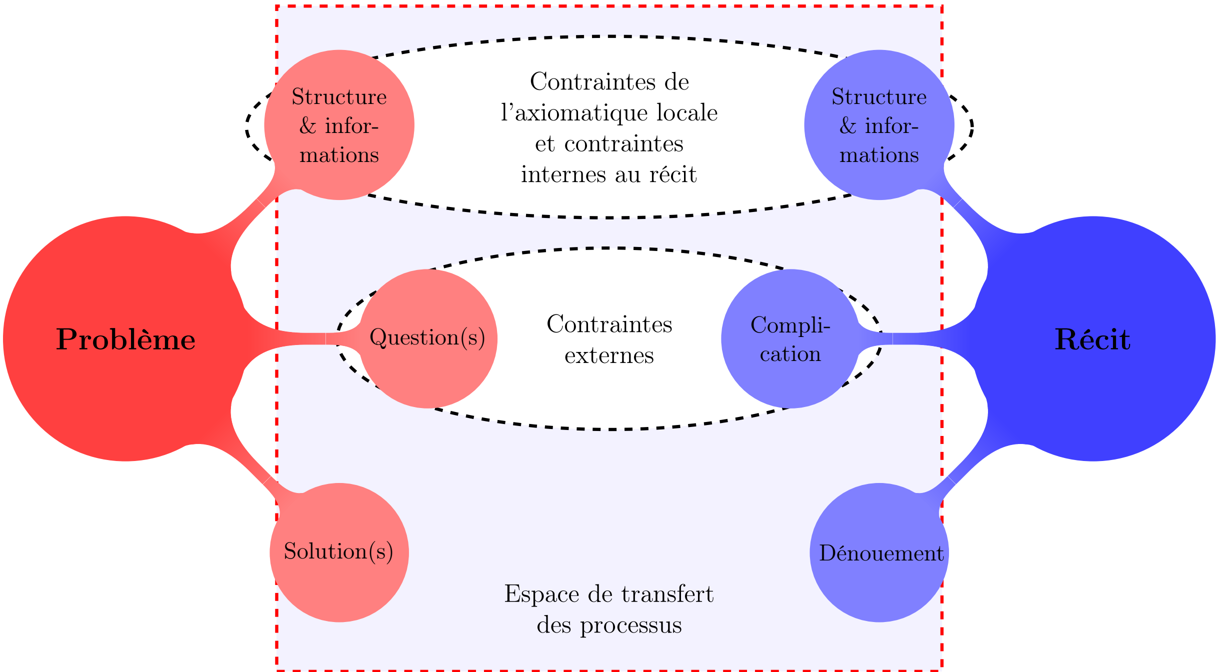


FIGURE 9.9 – Espace de tranfert des processus - Prise en charge du jeu

C'est donc au niveau de la composante *Structure & Informations* que nous envisageons l'action du jeu. Il nous permet de produire une situation qui peut se lire à la fois du point de vue des mathématiques et du récit. La construction du problème, tout comme celle du récit s'envisage dans le cadre de contraintes externes fixées par nos soins. Ce sont ces contraintes qui constituent nos *variables didactiques* et nous permettent de tester nos hypothèses. Nous envisageons pour cela notre expérimentation dans le cadre méthodologique de l'*ingénierie didactique* proposé par Artigue (1988). Ce choix nous permet de confronter les potentialités de notre milieu, via une analyse des choix effectués déterminant les *"possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont [l'élève] dispose"* (p. 258), aux productions effectives des élèves. Ainsi, nous pouvons valider, de manière interne, nos hypothèses grâce à la confrontation entre analyse *a priori* et analyse *a posteriori*.

Chapitre 10

Présentation et analyse *a priori* de notre expérimentation

Pour faciliter la lecture de l'analyse de notre expérimentation, nous débutons ce chapitre en présentant les différentes phases de notre expérimentation. L'objectif est de donner au lecteur des points de repères pour situer, par rapport à la chronologie de la séquence réalisée, les analyses que nous effectuons dans la suite.

Nous avons conduit deux versions de notre expérimentation conçue pour des classes de cycle 3 : une séquence de deux séances (réalisée en juin 2012) et une séquence plus complète de trois séances (réalisée en décembre 2012). Elles se composent d'une succession d'activités [1] que nous répartissons en deux phases :

- **Une première, basée sur un environnement sensible, celui du jeu et de parties effectivement jouées :**
  1. Comprendre les règles du jeu ;
  2. Jouer une partie ;
  3. Raconter (à l'écrit) une partie jouée ;
  4. Mettre en commun et comparer les récits de parties.

- **Une seconde, basée sur un environnement qui s'éloigne du sensible et où des parties imaginaires sont convoquées :**
  5. Conjecturer sur des caractéristiques de parties non jouées et justifier (à l'écrit) ces conjectures ;
  6. Raconter des parties imaginaires respectant une série de contraintes ;
  7. Débattre à l'oral sur les conjectures.

---

1. Nous définissons une activité comme étant ce que les élèves font suite à une consigne de leur enseignant. Elle débute lorsque l'enseignant donne "quelque chose" à faire à ses élèves. Elle se termine soit par l'action de l'enseignant qui interrompt l'activité (après un temps donné ou quand il considère que les élèves ont terminé) soit par l'action de l'élève qui estime qu'il a terminé l'activité.

La séquence réalisée en juin a été complétée par une phase plus classique de résolution de problèmes que nous présentons et analysons dans la section 11.5 lors de l'analyse des productions d'élèves.

Nous considérons chacune de ces activités du point de vue de l'élève et de son action ; c'est pourquoi nous les avons toutes exprimées en débutant par un verbe. De par leurs différentes natures, toutes ces activités n'ont évidemment pas le même statut dans notre expérimentation. Pour nos analyses, nous nous intéressons particulièrement à celles qui relèvent, d'une tâche de résolution de problèmes et de construction de récits, telles que nous les avons définies dans la partie II. Les activités proposées dans le cadre de la première phase, sont comme nous le verrons, des activités préliminaires. Les deux premières activités de la seconde phase sont au cœur de notre expérimentation. C'est au sein des tâches qui lient résolution de problème et construction de récits que nous testons nos hypothèses de recherche. La dernière activité est une phase de débat qui nous permet de renforcer nos analyses.

Nous débutons ce chapitre en nous intéressant à la notion de "tâche"(Section 10.1). Cette caractérisation nous permet de décrire l'approche que nous avons employée pour analyser les différentes tâches que nous proposons, en termes d'objectif et de choix. Nous pouvons ainsi définir pour chaque tâche un milieu didactique particulier (Section 10.2). Nous poursuivons par une analyse, *a priori* et toujours du point de vue de la construction du milieu didactique, de l'interaction entre les activités de la seconde phase d'expérimentation (Section 10.3). Ces deux sections nous permettent de mettre à l'épreuve les modèles d'interaction avec le milieu didactique (Chapitre 8, Section 8.2). En accord avec notre cadre théorique, nous développons également notre analyse *a priori* du point de vue des processus en jeu (Chapitre 8, Section 8.1). Nous proposons pour cela de mettre en évidence pour chaque activité le type de fonction du récit qu'elle peut solliciter ce qui nous permet, lors de l'analyse des productions, de repérer les processus qui sont effectivement transférés (Section 10.4). Nous présentons ces analyses dans des tableaux qui permettent également de rendre compte du déroulement des séquences d'expérimentation et qui peuvent être consultés indépendamment.

10.1 Caractérisation de la notion de tâche

Avant d'aller plus loin, en décrivant précisément ces activités, arrêtons-nous quelques instants sur le terme de *tâche* que nous venons d'employer. Celui-ci est utilisé dans de nombreux domaines ce qui peut lui conférer un sens assez flou.

Le Litré défini la tâche comme étant un "ouvrage qu'on se donne ou qu'on donne à faire". Il s'agit alors d'une action physique ou intellectuelle. Cette définition peut rappeller celle de Chevallard dans la Théorie Anthropologique du didactique qui énonce que *"toute activité humaine consiste à accomplir une tâche"*(Chevallard, 2002) [2]. Brousseau, dans l'article *Tâche, Situation, Activité* (2004) souligne bien cette composante actionnelle en indiquant qu'une tâche est "un ouvrage, une suite d'actions, une activité et/ou son résultat" (Brousseau, 2004, p.2) mais il ajoute à cela une composante de projet. Il précise à ce sujet que la tâche est bien un projet et non pas ce que le sujet accomplit effectivement :

> *"Une tâche est d'abord une succession définie d'actions connues, réalisables ou du moins envisagées comme telles, soit par celui qui doit les accomplir, soit par celui qui demande de les accomplir. Cet ouvrage est donc accompagné d'une intention de l'accomplir personnellement ou de le faire accomplir par une autre personne. Sa réalisation est précédée d'une anticipation."*(Brousseau, 2004, p.3)

Dans ce même article, Brousseau situe la notion de tâche par rapport à différents concepts de la Théorie des Situations Didactiques. Il utilise la définition de tâche tirée du *Grand dictionnaire de la psychologie (1996)* qui assimile *tâche* et *situation* pour séparer ces deux notions. Il indique également qu'une tâche ne peut être réduite à un algorithme, les actions en jeu doivent comporter une possibilité d'ajustements (même si ces modalités d'ajustement doivent rester faibles). À l'opposé, une tâche ne peut pas non plus être un *problème* car, selon Brousseau la succession d'actions nécessaires pour accomplir la tâche doit pouvoir être anticipée. Il ajoute également que considérer la production d'une solution à un problème comme une tâche serait réduire les problèmes à des algorithmes.

Travaillant dans une interaction avec le récit, nous sommes intéressés à la définition de *tâche* proposée en didactique des langues. Dans le texte *Un cadre europpéen commun de référence pour les langues* la définition suivante de la notion de tâche est proposée : *"Visée actionnelle que l'acteur se réprésente comme devant parvenir à un résultat donné, en fonction d'un problème à résoudre, d'une obligation à remplir, d'un but que l'on s'est fixé"*(Council of Europe, 2001, p.16). Cette définition reprend les deux dimensions principales proposées par Chevallard et Brousseau : l'action et le projet. La tâche doit toujours comporter une possibilité de choix mais ceux-ci doivent cependant, selon Brousseau, être réduits au minimum. Pour considérer l'invention comme une tâche, il faut que *"les élèves perçoivent clairement l'objectif poursuivi"* et que *"cette action donne lieu à un résultat identifiable"*(Goullier, 2006, p.21) [3].

Dans notre expérimentation, les activités que nous considérons comme des tâches et que nous analysons sont formulées de deux manières :

---

2. Citation complète : Toute activité humaine consiste à accomplir une tâche **t**, d'un certain type **T**, au moyen d'une certaine technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiée par une théorie Θ. (Chevallard, 2002, p.1).

3. Citation complète : *"Il n'y a tâche que si l'action est motivée par un objectif ou un besoin, personnel ou sucité par la situation d'apprentissage, si les élèves perçoivent clairement l'objectif poursuivi et si cette action donne lieu à un résultat identifiable"* (Goullier, 2006, p.21)

– Des tâches relevant prioritairement (du point de vue de l'élève) de la résolution de problèmes et pouvant comporter une part de construction de récits (Tâche 1).

– Des tâches relevant prioritairement (du point de vue des élèves) de l'écriture de récit mais comportant une part de résolution de problèmes ; Il s'agira par exemple d'inventer un récit pour justifier qu'une situation proposée est possible (Tâche 2).

Dans les deux cas, l'objectif est toujours clairement déterminé pour les élèves. De plus, la résolution d'un problème, tout comme la construction d'un récit repose sur une succession de choix. Et, même si le nombre de choix successifs peut être infini – ce qui ne correspondrait pas à la notion de tâche proposée par Brousseau – les choix possibles finissent comme nous le verrons par devenir répétitifs ou cycliques. C'est de ce point de vue que nous analysons les tâches que nous proposons, en termes d'objectifs et de choix. Cette approche nous permet de caractériser précisément le milieu didactique relatif à chacune des tâches, et son évolution entre les tâches.

10.2 Objectif, choix et milieu didactique

En accord avec le cadre théorique que nous avons développé en partie II, nous avons porté une attention particulière à la construction de nos tâches. Excepté les deux activités préliminaires, liées à la situation de jeu et au milieu matériel sensible, toutes les activités que nous proposons sont construites pour mettre en jeu des processus cognitifs relatifs à la fois à la construction d'un récit et à la résolution d'un problèmes. Chaque demande de construction de récit intègre la résolution d'un problème, à l'inverse chaque résolution de problèmes comprend la construction d'un récit, ou du moins d'une structure de récit. Pour faire fonctionner les modèles d'interaction que nous avons construits dans le chapitre 8, nous proposons de croiser deux axes d'analyse :

– **Axe problème :** où nous analysons le problème mathématique en jeu en déterminant les raisonnements mathématiques qui peuvent être construits et le type de processus principalement utilisés ;

– **Axe récit :** où nous analysons la situation du point de vue du récit en déterminant les récits, du moins la structure des récits, qu'il est effectivement possible de construire pour répondre à la question posée.

Le croisement de ces deux axes nous permet de déterminer les possiblités de choix et de caractériser précisément le milieu au travers de l'objectif proposé aux élèves. Nous présentons les tâches dans l'ordre proposé aux élèves lors de l'expérimentation.

10.2.1 Activité préliminaire 1 : Raconter une partie jouée

> En vous aidant des scores que vous avez notés, racontez la partie que vous venez de jouer. Il ne faut pas oublier de détails, il faut que tous les élèves de la classe puissent comprendre ce qu'il s'est passé en lisant votre histoire.

FIGURE 10.1 – Consigne de l'activité préliminaire

10.2.1.1 Objectif de l'élève

De notre point de vue, cette première activité de construction de récit permet de faire travailler aux élèves un aspect essentiel de l'expérimentation : l'écriture de récit. Il s'agit pour nous d'une tâche préliminaire permettant aux élèves d'entrer dans la situation et favorisant également la dévolution. Pour cela, nous avons demandé aux élèves de raconter la partie qu'ils étaient en train de jouer ou qu'ils venaient juste de jouer.

L'objectif des élèves est de construire un récit descriptif s'appuyant sur une partie empirique. Les productions à réaliser ne mettent pas directement en jeu de savoirs mathématiques. Cependant comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 9, Section 9.4 (p.163), les évènements racontés sont directement liés à l'attribution d'un score. Les choix des élèves dans la construction de leur récit leur permettent :

- **de mettre en place des liens chronologiques entre les différents évènements ;**
- **de construire des relations logiques entres des évènements : évènements similaires, contraires, etc. ;**
- **d'utiliser et de transformer les informations dont ils disposeront dans la suite : les évènements et les scores obtenus.**

C'est la fonction structurante du récit qui est ici mise en jeu. Afin de favoriser cette apparition de liens, nous souhaitons prévenir l'apparition de récits linéaires, sous forme de chronique (Lhoste et al., 2011) et / ou d'une narration *randonnée* (Orange & Guerlais, 2005). En effet, la linéarité de ces récits peut être un obstacle à la structuration, la problématisation et à la construction d'explications. Nous avons donc travaillé les supports et les consignes de cette activité pour favoriser l'apparition de relations qui ne soient pas seulement chronologiques et qui envisagent, par exemple, la comparaison, la répétition, le contraire, etc.

Cette activité préliminaire ne prend pas en charge de tâche de résolution de problème. Elle ne sera donc pas traitée dans la suite de notre thèse. Nous l'analysons donc dès à présent dans son intégralité.

10.2.1.2 Construction de l'activité

Dans l'objectif de favoriser la construction de liens, nous avons testé différentes versions de cette activité. Celles-ci dépendent de deux variables sur les conditions d'écriture :

- ◇ **Une première variable diactique sur la mise en relation des scores et du récit au niveau de la présentation.** Les scores peuvent être :

  - ○ juxtaposés au récit grâce à un système de tableau (Figure 10.2) ;

Consigne : Racontez la partie que vous venez de jouer ou que vous êtes en train de jouer.

Prénom du joueur 1 : ______________

Prénom du joueur 2 : ______________

Scénario / Récit	Scores	
	Joueur 1	Joueur 2

FIGURE 10.2 – Fiche construction de récits avec scores juxtaposés

  - ○ sur une feuille séparée (Figures 10.3 et 10.4).

Consigne : Racontez la partie que vous êtes en train de jouer ou que vous venez de jouer.

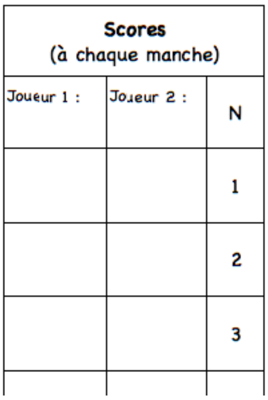
Prénom : ____________________

Nombre de manches : __________

Score du vainqueur : __________

Score du perdant : __________

FIGURE 10.3 – Fiche construction de récit seul



Scores (à chaque manche)		
Joueur 1 :	Joueur 2 :	N
		1
		2
		3

FIGURE 10.4 – Fiche de scores

◇ **Une seconde variable didactique sur le moment d'écriture du récit par rapport à la réalisation de la partie :**
  ○ le récit est rédigé pendant le déroulement de la partie ;
  ○ le récit est rédigé une fois la partie terminée.

Lors de notre première session d'expérimentation (juin 2012), nous avons donc testé trois scénarios afin de déterminer expérimentalement celles favorisant la mise en place de liens logiques dès le début de l'expérimentation.

10.2.1.3 Productions des élèves

Nous avons pu ainsi tester, lors de notre première session d'expérimentation, toutes les modalités et combinaisons de nos deux variables (Table 10.1).

Version	Écriture du score		Écriture du récit	
	Juxtaposée	Séparée	Pendant la partie	Après la partie
V1	x		x	
V2		x	x	
V3		x		x

TABLE 10.1 – Variations sur l'écriture du score

Version 1 : Les élèves écrivent leur récit tout en jouant une partie en utilisant un tableau à trois colonnes : Scénario / Score du joueur 1 / Score du joueur 2.

Version 2 : Les élèves écrivent leur scénario en jouant sur une fiche récit et inscrivent les scores à chaque manche sur une fiche de scores.

Version 3 : Les élèves inscrivent les scores dans la feuille de scores en jouant leur partie puis l'écrivent sur une fiche récit après l'avoir terminée.

Comme anoncé, nous présentons ci-après quelques éléments permettant de rendre compte des conséquences de ces variations sur les productions des élèves :

Version 1 : Les élèves ont eu tendance à raconter les évènements les uns à la suite des autres sans faire de liens ni avec les points gagnés à chaque manche, ni avec l'évolution du score total (Exemple : figure 10.5). Cela peut s'expliquer par le fait que les scores sont trop "proches" physiquement pour être en quelque sorte répétés. De plus, la partie n'étant pas terminée au moment de la rédaction, le score final n'est alors pas connu. On aurait cependant pu imaginer en cours de partie une inscription du score courant des deux joueurs. Ces caractéristiques retrouvées dans la majorité des récits produits nous ont incités à proposer une feuille de score indépendante du récit.

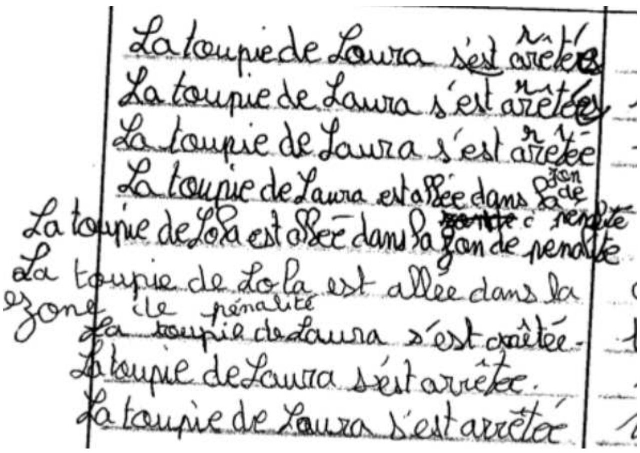


Figure 10.5 – Exemple 1

Version 2 : Les élèves ont insisté sur le gain ou la perte de points. Les évènements sont moins mis en avant. Le score étant à présent "loin" physiquement, il prend le pas sur les évènements. De plus, le récit étant rédigé pendant la partie il reste, comme dans le cas précédent très séquencé. Il parait donc important d'évoluer vers un récit produit *a postériori*.

Version 3 : Le récit est plus construit que dans les deux versions précédentes ; le lien entre les évènements et l'évolution des scores est mis en évidence. Plusieurs récits proposent une mise en relation entre les différents évènements. Nous avons relevé différentes natures de relations : par exemple temporelle et comparative. (Exemple : figure 10.6 p. 179).

La proposition d'un tableau de scores séparé dans les versions 2 et 3 permet une prise de distance avec l'activité de jeu. Dans la deuxième session de l'expérimentation (décembre 2012), nous avons donc choisi d'utiliser uniquement la troisième version de

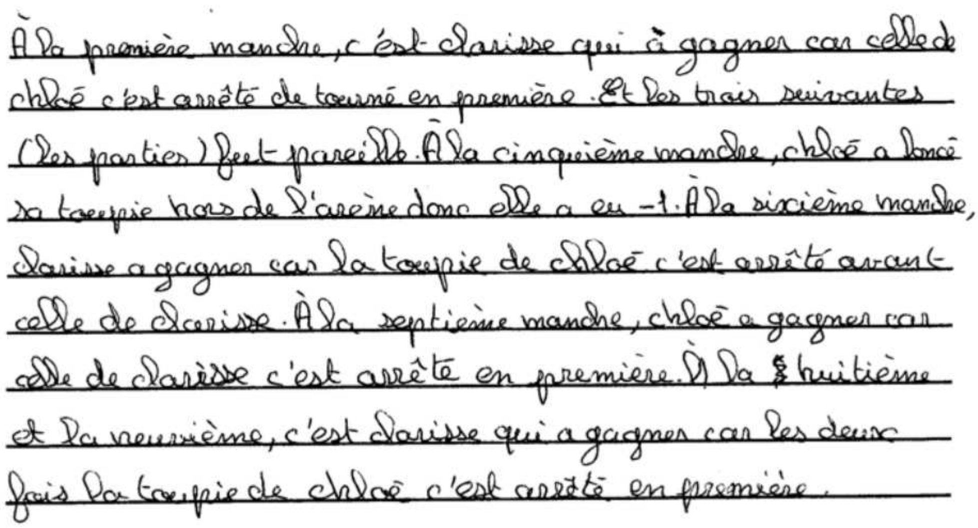

À la première manche, c'est Clarisse qui à gagner car celle de
chloé c'est arrêté de tourné en première. Et les trois suivantes
(les parties) feet pareille. À la cinquième manche, chloé a lancé
sa toupie hors de l'arène donc elle a eu -1. À la sixième manche,
Clarisse a gagner car la toupie de chloé c'est arrêté avant
celle de Clarisse. À la septième manche, chloé a gagner car
celle de Clarisse c'est arrêté en première. À la ~~8~~ huitième
et la neuvième, c'est Clarisse qui a gagner car les deux
fois la toupie de chloé c'est arrêté en première.

FIGURE 10.6 – Exemple 2

cette activité pour faire sortir les élèves d'un récit linéaire et de provoquer chez eux une première transformation des informations comme nous le souhaitons.

10.2.2 Activité préliminaire 2 : Mettre en commun et comparer des récits de parties

L'objectif de cette activité est de permettre aux élèves de constituer un rapport localement stable [4] avec les informations et objets disponibles à ce moment de la séquence : les suites de scores, les nombres de manches qui servent à caractériser les situations, les règles du jeu. Comme nous l'avons indiqué lors de la construction de notre modèle théorique, c'est le récit qui doit permettre le passage du milieu matériel (celui du jeu et des parties effectivement jouées) au milieu objectif (celui de l'ensemble des parties possibles). En effet, dans la suite de la séquence, les élèves ne pourront pas s'appuyer directement sur des parties effectivement réalisées. Ils pourront faire appel à ces dernières uniquement via des récits que d'autres élèves ou eux-même auront construit. Ils devront, de plus, produire des récits de parties non basés sur des parties empiriques.

Pour cela, nous proposons aux élèves cette seconde activité préliminaire (à la résolution de problèmes) pour enrichir leur connaissance du milieu didactique. Nous proposons de le faire, à l'oral, en organisant la discussion :

- vers un partage des récits de tous les élèves. En prenant connaissance du déroulement des parties qu'ils n'ont pas réalisées, les élèves découvrent de nouveaux possibles empiriques. Le milieu didactique est donc enrichi grâce à la multiplication des exemples. De fait, grâce au partage des récits, le rapport aux objets de la si-

4. Au sens proposé par Margolinas (1998) que nous avons modélisé par rapport au récit dans la partie II de notre thèse, chapitre 8, section 8.2, p. 138).

tuation s'enrichit également.

– vers une détermination de critères objectifs et opératoires permettant de caractériser un récit de partie et donc une partie : nombre de manches, score du vainqueur, score du perdant, succession des évènements et suite de scores.

Pour permettre un partage des récits, nous proposons que chaque groupe d'élèves raconte, à l'oral, la partie qu'il a joué puis raconté par écrit. Éventuellement guidés par l'enseignant, les élèves comparent les parties afin de déterminer les similitudes et / ou les différences. Ci-après, dans le tableau 10.2, nous produisons une liste d'observations qui sont réalisables :

1	Il n'y a pas le même nombre de manches dans toutes les parties.
2	Les scores ne sont pas les mêmes dans toutes les parties.
3	Le score du perdant n'est pas toujours le même.
4	Le score du vainqueur n'est pas toujours le même.
5	Le vainqueur peut avoir 7 points.
6	Le vainqueur peut avoir 8 points.
7	Le vainqueur peut avoir 9 points.
8	Deux parties peuvent se terminer sur le même score et s'être déroulées différement.

TABLE 10.2 – Liste des observations de récits de parties

Le milieu matériel peut alors être plus ou moins riche en fonction des parties effectivement jouées par les élèves. Certaines observations proposées dans le tableau 10.2 ne pourront pas forcément être réalisées immédiatement. Les trois observations colorées (1, 2 et 8) sont les plus importantes, selon nous, à travailler à ce moment de la séquence. Ces trois observations sont, de notre point de vue, nécessaires pour permettre à l'élève de prendre de la distance par rapport aux récits de parties et de les analyser avec un regard critique et opérationnel. Il incombe donc à l'enseignant de compléter lui même le milieu didactique en proposant des exemples de récits permettant d'effectuer les observations inscrites dans les cases colorées.

Avec ces deux activités préliminaires, programmées lors de la première séance de nos six expérimentations, nous amenons les élèves à la construction d'un premier rapport stable aux objets déterminants pour la situation comme les suites de scores et le nombre de manches. Ce rapport est bien évidemment incomplet, les élèves n'ont pas à déterminer et ne peuvent pas déterminer, toutes les caractéristiques de la situation telle que nous l'avons définie dans le chapitre 9 (Section 9.2).

Les tâches de résolution de problèmes et de construction de récit que nous proposons dans la suite sont orientées vers cet objectif de détermination, par les élèves, de certaines caractéristiques de la situation.

10.2.3 Tâche 1 : Conjecturer sur des caractéristiques de parties non jouées et justifier les conjectures (par des récits de parties)

1. `Dans ta partie, quel score a eu le vainqueur ?`
2. `Dans ta partie, quel score a eu le perdant ?`
3. `Dans ta partie, combien y a-t-il eu de manches ?`
4. `À ton avis, quel(s) score(s) peut avoir le vainqueur d'une partie ? Justifie ta réponse.`
5. `À ton avis combien de manches sont nécessaires pour terminer une partie ? Justifie ta réponse.`

Consigne de la tâche 1 : Construction de conjectures.

10.2.3.1 Objectif des élèves

Lors de la seconde séance de notre expérimentation avons nous demandé aux élèves d'émettre deux conjectures à propos de la structure de la situation proposée :

Conjecture 1 : Sur les scores que le vainqueur d'une partie peut atteindre.

Conjecture 2 : Sur le nombre de manches nécessaire pour terminer une partie.

Ces conjectures doivent être établies lors des questions 4 et 5. Nous demandons alors aux élèves leur avis – `"À ton avis, ..."` – ils doivent donc se détacher des parties effectivement jouées. Pour y répondre, les élèves doivent prendre en compte les règles du jeu et donc l'axiomatique locale. Nous avons montré dans le chapitre 9.2, que le vainqueur d'une partie peut atteindre un score de 7, 8 ou 9 points et que son score reste strictement inférieur à 10 points (Théorème 9.2.3, p. 154). Nous avons également démontré qu'il était nécessaire de jouer au moins trois manches pour terminer une partie (Théorème 9.2.3, p. 153). L'objectif pour les élèves est donc de déterminer deux caractéristiques essentielles de la structure de la situation.

10.2.3.2 Choix des élèves pour construire une justification

Au-delà des réponses numériques que peuvent proposer les élèves (sur les scores possibles ou le nombre de manches), nous nous intéressons aux justifications qu'ils produisent.

La construction de récit n'étant pas imposée par les consignes de l'activité, nous envisageons l'apparition de quatre types de justifications :

MA : Justification basée sur le matériel ;
RJ : Justification basée sur les règles du jeu ;
EXP : Justification basée sur l'expérience des parties vécues ;
PE : Justification basée sur les possibles explicatifs.

Nous décrivons ces différents types de justifications en nous basant sur l'étude de la première conjecture :

```
4. À ton avis, quel(s) score(s) peut avoir le vainqueur d'une
partie ? Justifie ta réponse.
```

Note : Pour plus de clarté, nous faisons apparaître la justification avant la (ou les) valeurs des conjectures qu'elles valident. Nous ne sous-entendons pas, ici, d'ordre d'apparition entre la conjecture sur la valeur et la construction de la justification.

Justification basée sur le matériel

Lors de la première séance, nous fournissons aux élèves une feuille de scores leur permettant de comptabiliser leurs points (Figure 10.4, p. 177). Elle se présente sous forme d'un tableau à deux colones (Score joueur 1 / Score joueur 2) et de 18 lignes selon les classes permettant de noter les scores obtenus à chaque manche. Nous avons constaté, *a posteriori*, que ce nombre de lignes fixé pouvait induire chez les élèves l'idée que le nombre de manches est limité à 18 ou 12. Les élèves peuvent ainsi conjecturer un score maximal dépendant de ce nombre maximum de manches.

MA 1 : L'évènement le plus fréquent lors d'une partie effectivement jouée est l'arrêt d'une des toupies. Il est plus rare de coincer la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité et encore plus de l'éjecter. Cet évènement rapporte 1 point. Il est donc possible d'envisager des réponses produites à partir du raisonnement suivant : "*Je gagne 1 point par manche, il y a au maximum 18 ou 12 manches dans une partie, le vainqueur peut donc avoir 18 ou 12 points*". Les deux valeurs maximum de conjectures possibles pour le score du joueur vainqueur sont alors 18 et 12. **Valeur conjecturée : {18} ou {12}.**

MA 2 : L'élève à la recherche d'une valeur de conjecture la plus grande possible peut produire le raisonnement suivant : "*Il y a 18 ou 12 manches à jouer, en gagnant 3 points*[5] *par manche je peux atteindre 51 ou 36 points*" Les deux valeurs maximum de conjectures possibles pour le score du joueur vainqueur sont alors de 51 ou 36. **Valeur conjecturée : {51} ou {36}.**

5. Il s'agit du nombre de points maximum qu'il est possible d'obtenir en remportant un manche, axiome A3 présenté page 152.

Justification basée sur les règles du jeu

Les règles du jeu constituent à ce moment de la séquence le cadre de référence à propos de la situation. Ce sont elles qui indiquent ce qu'il est possible ou impossible de faire. Dans les règles du jeu, il est indiqué que "*le premier joueur qui a 7 points (ou plus) gagne la partie*" (p. 148). Le point critique de cet énoncé est le terme *"ou plus"*. L'élève peut le prendre en compte ou l'ignorer :

RJ 1 : Un élève qui ne prendrait pas en compte le "*ou plus*" et/ou qui n'aurait pas intégré dans son milieu empirique une partie se terminant à un score plus élevé que 7 points (qui est le plus fréquent dans une partie réelle) produit une conjecture de valeur 7. Il la justifie en disant que "*le vainqueur d'une partie est celui qui a 7 points*". **Valeur conjecturée :** {7}**.**

RJ 2 : Un élève qui prendrait en compte le "*ou plus*" mais qui n'aurait pas (encore) pris en charge le fait qu'un joueur ne peut pas atteindre plus de 9 points pourrait proposer une (ou plusieurs) conjecture(s) supérieure(s) ou égale à 7 mais également à 10 points. Il justifie en disant que "*le vainqueur d'une partie est celui qui a plus de 7 points*" sans limite de score. **Valeur conjecturée : { Tout score supérieur ou égal à 7, voire infini }.**

Justification basée sur l'expérience des parties vécues

EXP : L'élève cite en exemple des parties effectivement réalisées lors de la première séance par lui même ou d'autres élèves de la classe. Lors de la mise en commun dans l'activité préparatoire 2, tous les scores des parties sont affichés au tableau, ils y restent toute la séquence. **Valeur de la conjecture : { (7 ; 8 ; 9) ou de manière incomplète une combinaison de ces scores : (7), (8), (9), (7 ; 8), (7 ; 9) ou encore (8 ; 9) }.**

Justification basée sur les possibles explicatifs

L'élève cite en exemple une partie qu'il construit pour l'occasion. Il construit un possible explicatif, c'est à dire un récit permettant de justifier une situation problématique. Il est possible d'envisager trois types de réponses :

PE 1 : L'élève construit trois parties complètement indépendantes. { (7 ; 8 ; 9) ou de manière incomplète une combinaison de ces scores : (7), (8), (9), (7 ; 8), (7 ; 9) ou encore (8 ; 9) }.

PE 2 : L'élève construit des parties ayant un début commun, jusqu'à six points (décrit ou non) et conclu par un évènement permettant de gagner 1, 2 ou 3 points ce qui amène à un score de 7, 8 ou 9[6]. **Valeur conjecturée : { (7 ; 8 ; 9) }.**

PE 3 : À ces propositions peut s'ajouter la construction d'une partie ou le score du vainqueur serait supérieur ou égal à 10 si l'élève ne perçoit pas que la partie est terminée. **Valeur conjecturée : { Un score supérieur ou égal à 10 }.**

Nous faisons remarquer au lecteur qu'une même conjecture peut être coroborrée par différents types de justifications.

Concernant la seconde conjecture – à propos du nombre de manches nécessaires pour terminer une partie – il est possible d'envisager le même type de justification, excepté pour le matériel. Il est en effet peu probable que des élèves disent qu'il faut 12 manches au minimum (parce qu'il y a 12 lignes) en raison des parties déjà jouées.

```
5. À ton avis, combien de manches sont nécessaires pour terminer
une partie ? Justifie ta réponse.
```

rj : Les règles du jeu indiquent qu'il est possible de gagner au maximum 3 points par manche. Pour atteindre un score de 7 points il est nécessaire de jouer au moins trois manches. **Valeur conjecturée : { 3 }.**

exp : L'élève cite en exemple des parties effectivement réalisées et donne en conjecture la valeur minimale du nombre de manches indiqué dans le tableau des scores de la classe. **Valeur de conjecturée : {Valeur minimum empirique}.**

pe : L'élève construit une partie comprennant le moins de manches possible (sans contrôle explicite de ce minimum). **Valeur conjecturée : {Valeur minimum non empirique}.**

Nous pouvons remarquer que dans le cas de cette conjecture, c'est l'analyse des règles du jeu qui produit, à coup sûr, la réponse correcte. Elle cependant est sans doute plus compliquée à construire que les deux autres types de justification et nous ne sommes pas sûrs, à ce niveau, qu'elle sera privilégiée. Il est possible, mais pas obligatoire, d'obtenir une conjecture correcte avec les deux autres justifications.

10.2.3.3 Remarque sur l'analyse des productions et la structuration du milieu

Ce qui nous intéresse dans l'analyse des productions d'élèves sur l'ensemble de cette tâche de conjectures est de voir si les justifications des élèves reposent sur une construction

6. On peut alors considérer qu'on a les prémisses d'une justification par la prise en compte d'un impossible explicatif. Nous n'envisageons pas dans cette analyse *a priori* que les élèves justifient qu'il n'est pas possible d'atteindre un score supérieur ou égal à 10 points.

de récit. À fortiori, nous cherchons à savoir si ce mode de justification est privilégié par les élèves ou plus efficace. Nous nous inscririons alors dans la pensée de Bruner que nous avons déjà cité (p. 58) :

> *"le récit nous propose des moyens simples et souples pour traiter les résultats incertains de nos projets et de nos anticipations"* (Bruner, 2008, p. 40).

Les conjectures que nous demandons ici aux élèves sont bien des anticipations. Ils n'ont qu'une vision partielle de l'ensemble des parties possibles. Nous donnerons lors du débat (Activité 7, p. 171), la possibilité aux élèves de prendre conscience des "manques" du milieu de référence par rapport au milieu objectif qu'ils sont en train de construire.

10.2.4 Tâche 2 : Inventer et raconter des parties imaginaires respectant une série de contraintes

Dans cette seconde tâche, nous faisons en choix dans la consigne qui est radicalement différent de celui fait pour la première tâche : nous imposons la construction de récit aux élèves. Nous reproduisons ci-après les consignes données aux élèves.

Nous en avons proposé trois versions, construites via différents ajustements que nous analysons :

- une version "zéro", réalisée dans une seule classe, la première dans laquelle nous sommes intervenus (Figure 10.7) ;
- une version "à une étape" [7], réalisée dans une seule classe, la seconde dans laquelle nous sommes intervenus (Partie gauche du table, figure 10.8) ;
- une version "à plusieurs étapes" réalisée dans les quatre autres classes (Partie droite du tableau, figure 10.8).

7. Nous justifions ces appellations dans l'analyse de l'activité.

`Inventer et raconter une partie qui se termine sur le score de 7 - 2.`

FIGURE 10.7 – Consigne version "zéro" : Construction de récits de parties imaginaires.

Version "à une étape"	Version "à plusieurs étapes"
J1 éjecte la toupie de J2 hors de l'arène. Les toupies tournent longtemps et celle de J1 s'arrête en premier. C'est encore la toupie de J2 qui tourne plus longtemps. La toupie de J1 envoie celle de J2 en zone de pénalité. La toupie de J1 tourne plus longtemps.	Je joue contre Camille. À la première manche, ma toupie a tourné plus longtemps donc j'ai gagné 1 point. À la deuxième manche, c'était l'inverse, c'est Camille qui a marqué 1 point parce que ma toupie s'est arrêtée en premier. On est à égalité. À la manche suivante, j'ai lancé ma toupie plus fort et j'ai réussi à coincer la toupie de Camille dans la zone de pénalité. J'ai gagné 2 points.
`Complète le récit pour que J1 gagne la partie avec` 1. `7 points ;` 2. `8 points ;` 3. `9 points ;` 4. `10 points.`	`Complète le récit pour que Laura gagne la partie avec` 1. `7 points ;` 2. `8 points ;` 3. `9 points ;` 4. `10 points.`

FIGURE 10.8 – Consignes versions à une et plusieurs étapes : Construction de parties imaginaires

Note : On peut remarquer que les deux récits proposés aux élèves ne sont pas rédigés de la même manière. Le nom des personnages change et les scores ne sont pas intégrés au récit dans la première version alors qu'ils le sont dans la seconde. Cependant, le travail de résolution de problème demandé est équivalent malgré ces différences. Nous les traiterons donc exactement de la même manière lors de cette partie de l'analyse.

10.2.4.1 Objectif pour les élèves

Dans ces trois versions, nous proposons aux élèves d'inventer et de raconter des récits de parties permettant d'atteindre un score fixé par nos soins. Dans un autre contexte – sans introduire le récit – ces exercices auraient pu être considérés comme des problèmes de transformation d'état (Vergnaud, 1981).

Les états initiaux sont déterminés par l'énoncé :
Version "zéro" : $(0;0)$
Version "à une étape" : $(6;2)$
Version "à plusieurs étapes" : $(3;1)$
Dans une première question les élèves doivent les expliciter. Il faut ensuite déterminer la valeur de la transformation du score des deux joueurs dans le cas de la version "zéro" et il faut déterminer celle du joueur 1 / Laura, tout en contrôlant que le score du joueur 2 / Camille ne gagne pas la partie.

La structure des problèmes proposés se rapproche de celle proposée par Vergnaud pour les problèmes de transformation dans la classification des problèmes additifs :

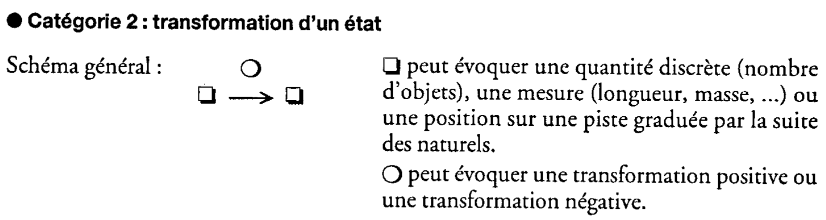


FIGURE 10.9 – Structure des problèmes de transformation d'état

Dans notre cas, nous travaillons sur des transformations de deux suites de naturels :

$$(N \times N) \to (N \times N)$$

$$(\text{Score initial}_{joueur1};\text{Score initial}_{joueur2}) \to (\text{Score final}_{joueur1};\text{Score final}_{joueur2})$$

La version "zéro" impose de prendre en charge l'évolution du score des deux joueurs puisque le score final est fixé pour chacun des joueurs (7–2). On cherche la transformation :

$$(0;0) \rightarrow (7;2)$$

Les versions à "une et plusieurs" étapes n'imposent pas la prise en charge de l'évolution des scores du second joueur excepté le contrôle du fait qu'il ne gagne pas. On cherche les transformations (avec $x < 7$) :

$$(6;2) \rightarrow (7 \text{ ou } 8 \text{ ou } 9 \text{ ou } 10; x) \text{ Version "à une étape"}$$

$$(3;1) \rightarrow (7 \text{ ou } 8 \text{ ou } 9 \text{ ou } 10; x) \text{ Version "à plusieurs étapes"}$$

Ce qui est commun aux trois versions, est que nous introduisons (par la consigne) le récit dans la démarche des élèves. En faisant cela, nous ne proposons pas seulement une forme particulière pour l'expression de la réponse. Nous essayons de provoquer la mise en place de processus de construction d'explications. Il ne s'agit pas seulement de déterminer la transformation mais d'expliquer comment celle-ci peut avoir lieu. Ainsi, la question posée par le problème et celle posée par le récit – comment est-il possible de parvenir à ce score ? – coïncident. Cette caractéristique enrichit et structure différement le milieu didactique. C'est cet aspect que nous analysons.

Il n'est plus possible pour les élèves de s'appuyer sur des parties effectivement réalisées pour effectuer la tâche proposée. Ils doivent construire ce que nous avons nommé un *"récit d'anticipation"* (Chapitre 9, section 9.4, p. 163). Ils construisent ainsi, dans l'espace ouvert par la fiction, des "*possibles explicatifs*". Nous souhaitons analyser la manière dont les élèves se saisissent de la narration et des contraintes du milieu didactique pour construire leur raisonnement.

10.2.4.2 Version "zero"

Nous avons construit la version "zéro" de l'activité comme un test pour vérifier la faisabilité de ce type de tâche. Nous n'analysons pas dans ce manuscrit le travail réalisé par les élèves. Lors de notre analyse *a priori*, nous traitons donc uniquement les deux versions "finales" de l'activité :

```
Complète le récit pour que J1 (version "à une étape") / Laura
(version "à plusieurs étapes") gagne la partie avec 7, 8, 9 et
10 points.
```

10.2.4.3 Choix de construction

Dans les deux versions de l'activité, nous proposons aux élèves le début d'un récit de partie. Ils doivent le compléter pour que le vainqueur désigné termine avec un score déterminé (7, 8, 9 et 10 points). La donnée de cette situation initiale ainsi que les quatre questions que nous posons peuvent être assimilées à des problèmes arithmétiques. Ici, le début du récit proposé détermine l'état initial : le score de J1 (version "à une étape") / Laura (version "à plusieurs étapes").

Nous disposons donc d'une première variable : la valeur du score à atteindre. Il y a quatre états finaux proposés donc quatre problèmes à résoudre. Il faut déduire des états initiaux (calculé par les élèves) et finaux la valeur de la transformation (Figure 10.10).

Version "à une étape"		**Version "à plusieurs étapes"**		**État final**
État initial	Transformation	État initial	Transformation	
6	1 point	**3**	4 points	7
	2 points		5 points	8
	3 points		6 points	9
	4 points		7 points	10

FIGURE 10.10 – Valeurs des transformations (en fonction de la valeur du score à atteindre)

Du fait de la nécessité de raconter le déroulement de la partie, la construction de la réponse peut se faire de deux manières :

Procédure "par tatonnements" : Choix d'évènements, calcul et ajustements :

1. Choix d'un évènement (apportant des points pour augmenter le score) puis calcul du score obtenu ;
2. Si le score est celui espéré on s'arrête ; sinon on recommence.

Procédure "par calcul" : Calcul de la transformation puis détermination des évènements :

1. Calcul de la transformation ;
2. Détermination des évènements permettant de produire cette transformation.

De par la structure de la situation (Théorème 3, p. 154), nous pouvons anticiper qu'il n'est pas possible de construire une partie où le vainqueur termine avec un score de 10 points. Nous traitons donc ce cas séparément des valeurs 7, 8 et 9 par lesquels nous commençons.

10.2.4.4 Analyse du milieu didatique - Scores de 7, 8 ou 9

Les deux versions de l'activité ("à une étape" et "à plusieurs étapes") proposent le même type de problème, le calcul d'une transformation. La différence entre les deux versions de l'activité ne se situe pas au niveau des valeurs des transformations. Dans les deux cas, il faut effectuer une soustraction, ou une addition à trous, avec des nombres inférieurs à 10 et sans retenue. La différence est relative à la construction du récit.

En inscrivant le récit dans la consigne de l'activité, nous modifions le milieu didactique. Du point de vue mathématique, il suffit de déterminer la valeur de la transformation, du point de vue du récit il faut proposer une succesion d'évènements permettant de réaliser cette transformation. La construction du récit doit ainsi prendre en charge la structure de la situation. L'établissement d'une logique relative au récit est alors nécessaire pour organiser des informations mathématiques. Les processus de raisonnement peuvent potentiellement se développer au travers de la construction du récit. Ainsi, nous pouvons envisager ici le récit comme un outil participant aux processus de traitement et de structuration des informations dans le cadre d'une situation de résolution de problèmes. **L'introduction du récit enrichit le milieu didactique en renforçant le *registre des nécessités* (Hersant, 2010b).** Nous testons ainsi le modèle d'enrichissement didactique que nous avons théoriquement construit dans la partie II (Chapitre 8, Section 8.2, p. 135). En effet, pour respecter la consigne qui leur impose de raconter, les élèves sont amenés à prendre en compte la structure de la situation, ses contraintes et ses nécessités, de manière plus approfondie.

Les scores des joueurs à la fin du récit (état intial) proposé aux élèves constituent alors, après la valeur du score à atteindre, une seconde variable didactique. Dans la première version "à une étape", le score du futur vainqueur est de 6 points, dans la seconde "à plusieurs étapes" il est de 3 points. En accord avec l'axiomatique locale, le nombre de manches nécessaires pour terminer la partie n'est pas le même dans les deux versions de l'expérimentation (Figure 10.11).

	Version "à une étape"	**Version "à plusieurs étapes"**
État intial	6 - 3	3 - 1
Score final du vainqueur	7, 8 ou 9	7, 8 ou 9
Nombre de manches possible	Minimum : 1 Maximum : ∞	Minimum : 2 Maximum : ∞

FIGURE 10.11 – Variations du nombre de manches

Version "à une étape"

Dans la première version "à une étape", pour atteindre 7, 8 puis 9 points, le vainqueur doit respectivement gagner 1, 2 ou 3 points. Au vu de la structure de la situation, une seule étape est nécessaire pour terminer le récit. Il est donc possible de déterminer ce que nous appelons des *récits minimaux* répondant à la tâche demandée. Nous les qualifions de *minimaux* car ils sont les plus courts et les plus simples permettant de répondre à la question ; ils comportent une seule étape. Nous en présentons un représentant dans le tableau 10.12 ci-dessous.

Score	Récit minimal	Variation du score
7 points	La toupie de J2 s'est arrétée en premier.	+1
8 points	La toupie de J2 est coincée en zone de pénalité.	+2
9 points	La toupie de J1 éjecte la toupie de J2 hors de l'arène.	+3

FIGURE 10.12 – Récits minimaux - Version à une étape

Nous pouvons imaginer que ces récits, ou leurs équivalents, qui sont les plus simples et les plus rapides à construire, seront les plus fréquents dans les réponses des élèves. Cependant, il est possible que des élèves proposent des récits plus complexes, mettant en jeu une variation de score négatif de J1 et/ou une variation du score de J2. Quelle que soit la variation proposée pour ces récits, nous les qualifions de *récits composés* en opposition aux *récits minimaux*. Nous en proposons un exemple ci-dessous.

La toupie de J1 s'est arrêtée en premier. J2 marque un point. Ensuite c'est la toupie de J2 qui s'arrête en premier, J1 a sept points.

FIGURE 10.13 – Exemple de *récit composé* pour 7 points

Version "à plusieurs" étapes

Dans la seconde version "à plusieurs étapes", la construction du récit passe par un minimum de deux étapes. Par conséquent, les *récits minimaux* tels que nous les avons présentés pour la première version sont ici constitués de deux étapes. La manière dont est raconté le récit n'a pas d'importance dans cette analyse. Ce qui le caractérise, ici, ce sont les évènements et la variation du score (*Cf.* Chapitre 9, Section 9.4, p. 163). Nous les représentons dans le tableau 10.14 page suivante.

Score	Récit minimal	Variation du score
7 points	...	+3 puis +1
	...	+1 puis +3
	...	+2 puis +2
8 points	...	+3 puis +2
	...	+2 puis +3
9 points	...	+3 puis +3

FIGURE 10.14 – Récits minimaux - 2nde version

La construction du récit peut sembler être du même type pour les trois questions. Cependant, pour atteindre 8 et 9 points il faut construire une suite se terminant par un évènement permettant de gagner respectivement 2 et 3 points sinon le joueur gagnerait à 7 points. Comme dans la version à une étape, il est possible d'envisager des constructions plus complexes, comme dans la première versions, avec des pertes de points et des variations pour le second joueur. Nous n'analysons pas ici l'ordre dans lequel sont présentés les différents évènements permetant de construire la transformation. Nous le ferons dans la section suivante (Section 10.3) lors de l'analyse de l'articulation des tâches.

10.2.4.5 Milieu et possibles explicatifs

Avec cette activité, les élèves entrent dans un travail explicatif mettant en jeu différents types d'informations. D'une part des données numériques avec les scores des joueurs et d'autre part des informations évènementielles permettant de construire des relations entre les données numériques. En proposant aux élèves une consigne sous la forme "racontez une partie", nous nous situons dans le cadre de la fiction, des possibles et des impossibles. **Nous faisons l'hypothèse que la forme de résolution proposée, le récit, devrait permettre aux élèves de prendre en compte d'une part les contraintes internes liées à l'axiomatique locale déterminée par les règles du jeu et d'autre part les contraintes externes imposées par l'énoncé du problème.**

La nécessité de construire un recit "en plusieurs étapes" dans la seconde version *ouvre*, selon nous, le milieu didactique du point de vue des élèves. En effet, nous faisons l'hypothèse qu'ils auront plus tendance dans ce type de situation à produire des *récits complexes*. Cela apparaîtra lors de l'analyse *a posteriori*.

10.2.4.6 Analyse du milieu didactique - Score de 10 points

Dans les deux versions de la tâche, il n'est bien sur pas possible de construire une partie se terminant sur un score de 10 points. D'un point de vue strictement calculatoire, il s'agit d'une augmentation de 4 points. Du point de vue du récit et de la structure, cette augmentation n'est pas possible à construire dans les conditions proposées. Nous pouvons anticiper plusieurs types de réponses :

– Refus direct de construire une partie correspondant à cette transformation en proposant une justification mathématique ;

– Essais de construction de récit, soldés par des échecs liés à la structure de la situation, puis refus de construction du récit ;

– Essai de construction qui aboutit à l'invention d'une partie dans laquelle les règles du jeu ne sont pas respectées. Dans ce cas, l'élève peut ne pas se rendre compte qu'il n'a pas respecté les règles du jeu et donc la situation ou à l'inverse, s'en rendre compte, et continuer tout de même le récit pour répondre à la question posée.

Ces types de réponses sont repris dans la section 10.3.

10.2.5 Activité finale : Débattre à l'oral sur les conjectures réalisées

Pour conclure la séquence dans la session de juin et la seconde séance dans la session de décembre (qui est complétée par une phase de résolution de problèmes plus traditionnelle), nous avons proposé une phase de débat sur les conjectures élaborées lors de la tâche 1 : conjecturer sur des caractéristiques de parties non jouées et justifier les conjectures. Pour répondre aux questions de l'enseignant, les élèves peuvent *a priori* convoquer ou non du récit. S'ils le font, nous anticipons 3 types d'utilisation :

– Référence à un récit de partie effectivement jouée lors de la première séance ;
– Construction d'un récit de partie imginaire ;
– Référence à un récit de partie imaginaire.

Au regard de notre cadre théorique nous pouvons envisager plusieurs hypothèses d'utilisation du récit lors de ces phases de débat. Les élèves peuvent :

– **S'appuyer sur les récits de parties réelles pour anticiper des résultats ;**

– **Imaginer des récits de parties imaginaires pour émettre des conjectures ;**

– **Utiliser des récits de parties pour justifier un résultat ;**

– **Confronter ces récits à la structure mathématique de la situation pour les valider ou les invalider**.

Nous analysons les débats, et mettons à l'étude ces hypothèses dans le chapitre 11 (Section 11.4). Maintenant que nous avons analysé individuellement les différentes activités proposées, nous proposons une analyse plus globale de notre expérimentation en considérant l'articulation des deux tâches principales.

10.3 Articulation des tâches

Dans la conception de notre expérimentation nous avons construit nos deux tâches principales en les articulant. Ces deux tâches mettent en jeu les scores que peut atteindre le vainqueur d'une partie [8].

Dans un premier temps, les élèves doivent conjecturer sur la valeur du score du vainqueur :

À ton avis, quel(s) score(s) peut avoir le vainqueur d'une partie ? Justifie ta réponse.

La réponse attendue des élèves est un score de 7, 8 ou 9 points. L'élève doit établir cette conjecture et tenter de la justifier. Nous partons du postulat que les élèves n'auront pas tous déterminé les bonnes valeurs pour cette conjecture. Sans proposer de correction, nous lançons les élèves dans la réalisation de la seconde tâche. Ils doivent construire des récits de parties dans lesquelles le score du vainqueur est fixé, 7, 8, 9 ou 10 points.

10.3.0.1 Hypothèses

Nous faisons l'hypothèse que la confrontation entre les conjectures proposées par les élèves dans la première tâche et la construction des possibles explicatifs dans la seconde devrait permettre :

- **aux élèves ayant réussi à déterminer les scores possibles et à les justifier, de confirmer et renforcer leur conjecture ;**
- **aux élèves ayant réussi à déterminer les scores possibles sans les justifier, d'imaginer une piste permettant de justifier leur conjecture ;**
- **aux élèves n'ayant pas imaginé tous les scores possibles (en répondant par exemple que le vainqueur d'une partie pouvait atteindre sept et huit points) d'envisager tous les scores possibles lors de la résolution des trois premiers problèmes (en particulier le troisième dans notre exemple) ;**
- **aux élèves ayant imaginé que tous les scores au dessus de sept étaient possibles, de remettre en cause leur hypothèse lors de la résolution du quatrième problème.**

8. Nous n'avons pas proposé d'activité de construction de récits pour approfondir la seconde conjecture. La correction de ces deux activités se déroule à l'oral sous forme d'un débat mené par l'enseignant.

10.3.0.2 Analyse de la structure des possibles explicatifs

Nous faisons le choix de nous intéresser seulement aux possibles explicatifs construits dans le cadre de la seconde version [9]. C'est alors l'ordre des évènements (que nous avons évoqué lors de l'analyse de cette tâche, p. 192) proposés par les élèves qui intervient. Nous pouvons envisager deux types de structure :

Structure 1 : Passage par l'état "Laura a six points". Les problèmes étant tous posés de la même manière, il est possible d'envisager une réponse "commune" aux quatre problèmes. Le passage par l'état "Laura a six points" est nécessaire pour atteindre un score de 9 points. C'est également le score maximum qu'il est possible d'atteindre avant de gagner une partie. Il est possible de le construire de différentes manières [10]. L'élève doit alors compléter son récit en faisant gagner 1, 2 puis 3 points à Laura pour atteindre les scores de 7, 8 et 9 demandés. Ainsi, la question des 10 points apparaît comme problématique. Il n'y a pas d'évènement qui permet de gagner 4 points d'un coup. Numériquement, nous pouvons représenter ce type de raisonnement de la manière suivante :

- Pour 7 points : $3+? = 7 \rightarrow 6+? = 7 \rightarrow 6 + 1 = 7$;
- Pour 8 points : $3+? = 8 \rightarrow 6+? = 8 \rightarrow 6 + 2 = 8$.
- Pour 9 points : $3+? = 9 \rightarrow 6+? = 9 \rightarrow 6 + 3 = 9$.
- Pour 10 points : $3+? = 10 \rightarrow 6+? = 10 \rightarrow$ Impossible dans notre situation.

Structure 2 : "Choix aléatoires". Il est également possible d'envisager des réponses indépendantes aux quatre problèmes avec des combinaisons plus complexes pour le score de Laura :

- Pour 7 points : $1 +1 +1 +1$ ou $2 + 2$ ou $2 + 1 + 1$; $3 + 1$
- Pour 8 points : $1 + 1 + 1 + 2$ ou $2 + 1 + 2$ ou $3 + 2$ ou $1 + 1 + 3$ ou $2 + 3$.
- Pour 9 points : $1 + 1 + 1 + 3$ ou $2 + 1 + 3$ ou $3 + 3$

La question des 10 points apparait alors moins problématique et plus facilement envisageable, les réponses n'ayant pas été construites sur une base commune.

9. Dans la première version, l'existence de *récits minimaux* simples à déterminer a eu tendance à transformer le problème en une simple recherche d'évènement, limitant ainsi les tâches liées au raisonnement. Les élèves ont majoritairement construit des récits à une étape alors qu'ils auraient pu envisager (comme l'ont fait certains) des récits impliquant une perte de points et/ ou une variation du score de l'adversaire.

10. Nous pouvons envisager une réponse qui ferait gagner trois points à Laura (par exemple en éjectant la toupie de son adversaire) qui amènerait donc à un score de 6-1.

10.3.0.3 Bilan

Dans l'analyse des réponses d'élèves, nous pourrons vérifier que la construction correspondant à la première structure "Laura a 6 points" permet effectivement aux élèves de réfuter le problème des 10 points. Et ce, de manière plus prononcée qu'en utilisant une structure de choix plus aléatoire. Lors de la phase de débat, dans laquelle le traitement de cette conjecture est à nouveau reprise, nous pourrons étudier la manière dont les élèves se saisissent de cette structure.

10.4 Conclusion : Mise en relation des tâches de résolution de problèmes et des fonctions du récit

Dans la partie II, nous avons fait l'hypothèse d'un transfert de processus entre les activités de construction de récit et les activités de résolution de problèmes (Modèle proposé dans le chapitre 8, Section 8.1, p. 129). Nous n'avons pas fait de distinction entre les processus excepté leur association privilégiée avec une fonction spécifique du récit (Fonctions définies dans le chapitre 7). Lors de l'analyse des productions d'élèves nous serons en mesure de déterminer quels processus sont effectivement transférés d'un espace à l'autre ainsi que les conditions de ce transfert.

Ce qui nous intéresse à présent, c'est donc d'associer chaque tâche ou activité avec une (plusieurs) fonction(s) du récit (fonction structurante, fonction problématisante, fonction explicative). **Nous avons fait attention lors de la construction de notre séquence de proposer de véritables tâches de résolution de problèmes (et de ne pas seulement convoquer du récit sur des situations qui n'auraient pas d'intention mathématique). Chacune privilégie cependant une catégorie de processus de résolution (processus structurants, processus de problématisation, processus d'explication).** Soit parce que cette catégorie privilégiée est mise en jeu plus souvent dans l'activité, soit que la mise en jeu des autres catégories de processus est dépendante de cette catégorie privilégiée. Chacune des activités que nous proposons est donc caractérisée par une double facette :

– pour une part, une relation avec une fonction heuristique du récit (fonction structurante, fonction problématisante, fonction explicative) ;

– pour l'autre part une convocation privilégiée de processus de résolution spécifiques (processus structurants, processus de problématisation, processus explicatifs et d'argumentation).

Nous présentons cette double composition dans les tableaux ci-après (Table 10.3 pour les activités préliminaires et 10.4 pour les tâches principales). Nous produisons en annexe E, les fiches de préparation proposées aux enseignants.

Activité	**Tâche principale, processus de résolution de problèmes**	**Fonction du Récit**
1. Comprendre les règles du jeu.	-	-
2. Jouer une partie.	-	-
3. Raconter (à l'écrit) une partie jouée.	**Processus structurants et modélisants** : Sélectionner, organiser et relier des informations afin de les transmettre.	**Fonction structurante :** Utilisation du récit comme outil de formulation et d'organisation.
4. Mettre en commun et comparer les récits de partie.	**Processus structurants et modélisants :** Sélectionner, organiser et relier des données / informations afin de repérer des régularités ou des particularités.	**Fonction explicative :** Construction d'explications pour éclairer les différences et les points communs entres les éléments caractéristiques des parties. Étude du récit comme objet structuré respectant des caractéristiques et apportant des informations.

TABLE 10.3 – Association type de processus et fonctions du récits dans les activités préliminaires

Activité	Tâche principale, processus de résolution de problèmes	Fonction du Récit
5. Conjecturer sur des caractéristiques de parties non jouées et justifier (à l'écrit) ces conjectures.	**Processus d'élaboration d'explications :** Considérer des informations empiriques, les associer avec des éléments structurants (les règles du jeu) pour produire de nouvelles informations et / ou des hypothèses	**Fonction de problématisation :** Utilisation du récit comme support de pensée pour envisager des possibles. **Fonction explicative :** Inscription dans la fiction et dans le domaine du possible pour s'affranchir du réel. Utilisation de l'objet récit comme élément d'argumentation et / ou de preuve.
6. Raconter des parties imaginaires respectant une série de contraintes.	**Processus d'élaboration d'explications et d'argumentation** : Construire des explications, qui sont à la fois des possibles et des justifications	**Fonction structurante :** Utilisation du récit comme support de structuration et organisation d'informations / données. **Fonction explicative :** Utilisation du récit comme support de construction de possibles. Inscription dans la fiction et dans le domaine du possible pour s'affranchir du réel. Utilisation de l'objet récit comme élément d'argumentation et / ou de preuve.
7. Débattre à l'oral sur les conjectures réalisées	Reprise des processus mis en jeu dans les deux tâches ci-dessus : **Processus d'élaboration d'explications et d'argumentation** : Considérer des informations empiriques, les associer avec des éléments structurants (les règles du jeu) pour produire de nouvelles informations et / ou des hypothèses. Construire des explications, qui sont à la fois des possibles et des justifications.	Reprise des fonctions **Fonction de problématisation :** Utilisation du récit comme support de pensée pour envisager des possibles. **Fonctions explicatives :** Utilisation du récit comme support de construction de possibles. Inscription dans la fiction et dans le domaine du possible pour s'affranchir du réel. Utilisation de l'objet récit comme élément d'argumentation et / ou de preuve.

TABLE 10.4 – Association type de processus et fonctions du récits dans les tâches de résolution de problèmes

Chapitre 11

Analyse des productions d'élèves

En préliminaire à ce chapitre nous débutons par une présentation de notre terrain d'expérimentation. Celui-ci est composé de six classes de cycle III réparties dans trois écoles primaires.

École primaire Lumière (Lyon) – Session de juin 2012 :
- une classe de CM1
- une classe de CM2
- une classe de CM1/CM2

Groupe scolaire Jean Guéhenno (Saint-Fons) – Session de décembre 2012 :
- une classe de CM1
- une classe de CM2

École primaire Paul Émile Victor (Lyon) – Session de décembre 2012 :
- un groupe d'élèves de CM2

Ces trois écoles nous permettent de considérer un planel composé de 138 élèves. Les deux écoles lyonnaises se sont implantées depuis plusieurs années dans le même secteur géographique. L'organisation interne diffère d'une école à l'autre. Dans l'école Lumière, les élèves sont répartis en niveaux, chaque classe a un enseignant pour l'année. À l'inverse dans l'école Paul Émile Victor [1] les élèves sont répartis en cycles, ils ont plusieurs enseignants. Les élèves de CM2 sont regroupés avec un enseignant unique en mathématiques. Le groupe scolaire Jean Guéhenno est beaucoup plus récent, il a ouvert à la rentrée 2009. Il se situe dans une zone ECLAIR [2], beaucoup d'élèves sont en difficulté scolaire. Les enseignants des six classes ont mené l'expérimentation en sachant que notre travail de thèse portait "sur la résolution de problèmes et le récit". Nous ne leur avons pas fait part de nos objectifs et nous ne leur avons pas donné de consigne particulière pour qu'ils incitent les élèves à utiliser le récit. Ils avaient à leur disposition les fiches de préparation présentées en annexe E.

1. L'école Paul Émile Victor est associée au laboratoire S2HEP dans le Cadre des LÉA (Lieux d'Éducation Associés) instaurés par l'Institut Français de l'Éducation.
2. Écoles, collèges et lycées pour l'ambition, l'innovation et la réussite

Notation : Pour alléger la désignation des différentes classes dans l'analyse des productions, nous avons numéroté les six classes de 1 à 6. Nous ne faisons pas de différence entre les niveaux, nous les désignons toutes par CM pour cours moyen et un numéro de classe dans l'ordre cité ci-dessus (chronologique par rapport à nos interventions) CM1, CM2, CM3, CM4, CM5, CM6.

Notre fil conducteur dans ces analyses va être l'établissement de la première conjecture, à propos des valeurs du score que peut atteindre le vainqueur d'une partie. Elle est, comme nous l'avons dit lors de notre analayse *a priori* au cœur des deux tâches que nous avons proposées. Elle est également au centre des débats. Nous analysons par conséquent les productions d'élèves écrites et orales en nous concentrant sur cette conjecture. L'analyse du traitement de la seconde conjecture (dans la tâche 1 et dans la phase de débat) nous permet d'approfondir ces premiers résultats.

Nous exposons nos analyses en suivant le plan défini dans le chapitre précédent en commençant par l'analyse des deux tâches principales de notre expérimentation : Tâche 1, Conjecturer sur des caractéristiques de parties non jouées et justifier les conjectures (Section 11.1) ; Tâche 2 : Inventer et raconter des parties imaginaires respectant une série de contraintes (Section 11.2). Nous poursuivons en analysant, du point de vue des productions d'élèves, l'articulation entre les deux tâches (Section 11.3). Après avoir traité dans ces trois premières sections des productions écrites, nous nous intéressons ensuite à des productions orales réalisées lors de la phase de débat : débattre à l'oral sur les conjectures réalisées (Section 11.4). Nous concluons en ouvrant sur la phase plus "classique" de résolution de problèmes que nous analysons dans son intégralité dans la section 11.5. Ces analyses nous permettent d'envisager, en réponse aux modèles théoriques d'interaction construits dans le chapitre 8, des modèles effectifs que nous présentons dans la conclusion de cette partie.

Notre corpus est composé des productions écrites réalisées par les élèves durant les séances. Nous utilisons les éléments définis dans notre analyse *a priori* pour les analyser. Nous présentons, dans cette analyse de productions, en exemple des extraits de copies pour illustrer nos résultats. Lorsque cela s'avère nécessaire, nous proposons en annexe un tableau recensant les réponses des élèves.

11.1 Analyse Tâche 1 : Conjecturer sur des caractéristiques de parties non jouées et justitifer les conjectures

Note : Cette tâche a été réalisée, lors de la seconde séance, dans cinq classes de cycle III (CM2, CM3, CM4, CM5 et CM6). En amont, durant la première séance, tous les élèves ont joué puis raconté une partie. Il a été réalisé une mise en commun durant laquelle les élèves ont présenté leur récit et / ou leur partie. Durant ce moment d'échanges, les élèves des cinq classes ont repéré les scores et le nombre de manches obtenus dans les différentes parties. Guidés par l'enseignant, ils ont établi que les parties effectivement jouées n'avaient pas toutes le même nombre de manches, que les scores des deux joueurs variaient selon le déroulement de la partie, que deux parties pouvaient comporter le même nombre de manches, aboutir au même score mais s'être déroulées différement. Il s'agit des observations que nous souhaitions obtenir à la suite de la seconde activité préliminaire (Mettre en commun et comparer des récits de parties) recensées dans le tableau 10.2 (p. 180). Les scores des joueurs et le nombre de manches de chaque partie jouée dans la classe sont affichés au tableau.

11.1.1 Remarque préliminaire

Nos lecteurs pourront s'étonner que nous caractérisions certaines productions comme étant des récits. Les textes ci-dessous sont des productions d'élèves, représentatives des productions des différentes classes. Il est possible de remarquer au fil des productions :

- à partir de la production 3, la perte des compléments circonstanciels et des adverbes de temps ("à la première manche", "puis", etc.) ;
- à partir de la production 4, un éloignement relatif des personnages, ils sont proposées via des pronoms personnels définis ("je", "mon adversaire" puis par des pronoms indéfinis ou démonstratifs ("on", "il", "le gagnant") ;
- à partir de la production 5, une transformation des évènements en scores non explicités et une apparition d'opérations écrites en ligne.

Production 1 : *J'ai éjecté 2 fois mon adversaire dans la zone, ça me fait 10 points. Puis, mon adversaire, ma toupie s'est arrêtée après moi 5 fois. Ça lui fait 5 points. Puis ma toupie s'est arrêtée 5 fois après elle, ça me fait 15 points, j'ai gagné.*

Production 2 : *À la première manche la toupie de mon adversaire s'est arrétée avant donc j'ai +1. À la deuxième manche j'ai coincé la toupie de mon adversaire à la zone de pénalité donc j'ai +2, à la troisième manche j'ai éjecté la toupie de mon adversaire donc +3. À la quatrième manche la toupie de mon adversaire s'est arrétée avant la ...*

Production 3 : *Pour 7 points, il pourrait éjecter ma toupie du stadium, cela lui fait 3 points. Il peut éjecter ma toupie cela lui fait 3 points et il pourrait faire que sa toupie tourne plus longtemps que moi. Cela lui ferait 1 point donc il aurait 7 points.*

Production 4 : *9 : il a éjecté trois fois la toupie de l'autre adversaire. 8 : il a éjecté 4 fois la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité. 7 : Pendant 7 parties sa toupie a tourné plus longtemps.*

Production 5 : *2 points si on éjecte la toupie de l'adversaire dans la zone de péanalité. 1 point si la toupie de l'adversaire s'arrête de tourner. 3 points si on éjecte la toupie de l'adversaire à l'exterieur du stadium. 2 points si on éjecte l'adversaire une nouvelle fois la toupie de l 'adversaire dans la zone de pénalité.*

Production 6 : *Si le gagnant fait 3 + 3 + 2 + 3 = 12 donc il peut avoir 12 points.*

Ces productions, malgré leurs différences, sont toutes des constructions de **possibles explicatifs**. L'élève crée une suite d'évènements qui sont désignés soit par l'évènement réel auxquels ils font référence ("on éjecte la toupie de l'adversaire") soit par l'objet mathématique qui les représente ("+3"). Cette suite n'est pas inventée au hasard, elle a pour but de répondre à un élément problématique : comment est-il possible d'atteindre un score déterminé. En ce sens, ces productions participent à la résolution d'une intrigue, et malgré l'absence de traits considérés traditionnellement comme caractéristiques (personnages, compléments circonstanciels, etc.) ce sont de véritables récits. Ils entrent dans la définition que nous avons choisie lors de l'établissement de notre cadre théorique : **production, orale ou écrite, relatant une succession d'évènements organisés autour d'un élément problématique** (p. 111). La perte des traits traditionnels n'amène pas la perte des fonctions du récit. La structuration par exemple peut être présente même en l'absence de personnages et de cadre spatio-temporel comme dans cette autre production d'élève : *Si on a 6 points et que ensuite on marque 3, 1, 2 ça donnera 9, 8 ou 7 points.*

Dans cette partie de l'analyse, comme dans les suivantes, lorsque nous considérons et que nous caractérisons des possibles explicatifs, c'est bien le récit et le rôle de la construction de récits que nous étudions.

11.1.2 Analyse des types de justifications

Dans cette première tâche, la demande de conjecture était formulée directement :

```
4. À ton avis, quel(s) score(s) peut avoir le vainqueur d'une
partie ? Justifie ta réponse.
```

L'analyse mathématique de la situation (réalisée dans le chapitre 9.1), nous permet d'affirmer que le vainqueur d'une partie peut obtenir un score de 7, 8 ou 9 points. Il ne peut pas atteindre un score supérieur ou égal à 10 (Théorème 3, p. 154). Lors de l'analyse *a priori* de cette tâche, nous avons mis en évidence quatre types de justification possibles (Chapitre 10, Section 10.2.3) :

MA : Justification basée sur le matériel ;

RJ : Justification basée sur les règles du jeu ;

EXP : Justification basée sur l'expérience des parties vécues ;

PE : Justification basée sur les possibles explicatifs.

Nous avons recensé les réponses des élèves (numérotés de 25 à 138) [3] ainsi que la justification proposée. Nous avons relevé la valeur de la conjecture proposée par rapport aux valeurs attendues (7, 8 et 9) et analysé le type de justification proposées. Ce tableau est présenté en annexe H (p. 292-296). Nous avons retrouvé tous les types de justification dans les proportions suivantes :

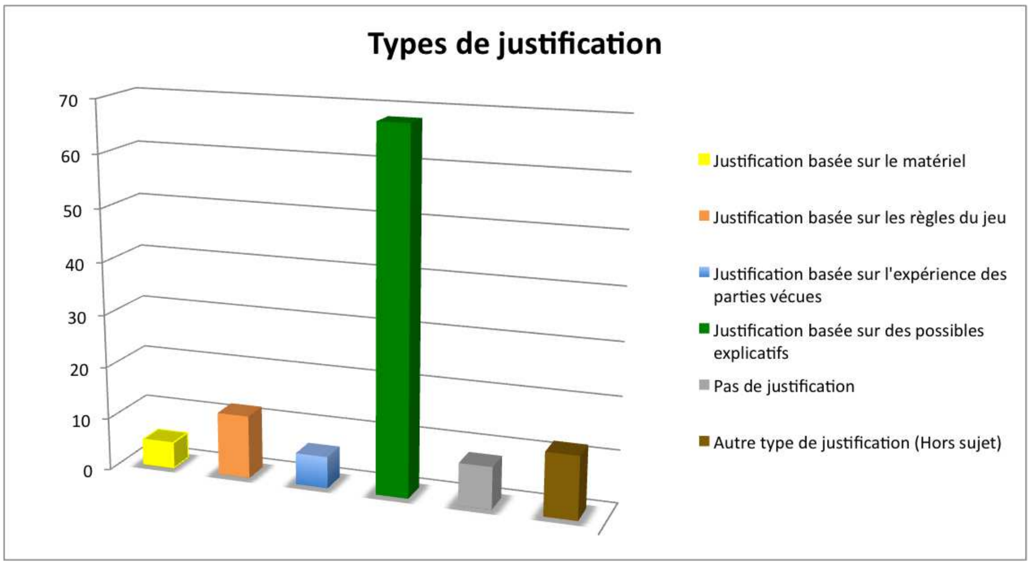


FIGURE 11.1 – Types de justifications

Seulement quelques productions utilisent, à partir des règles du jeu, des arguments mathématiques. À l'inverse, le nombre important de justifications par des possibles explicatifs (plus de la moitié des réponses, 68 sur 113) met bien en évidence la facilité des élèves à se projeter dans des récits de parties imaginaires. **La tendance naturelle au récit soulignée par Bruner est ainsi bien mise en évidence. L'espace ouvert par la fiction et la structure narrative permet aux élèves de construire et / ou de produire leurs explications et leurs justifications.** Nous n'avions pas imposé aux élèves de construire ce type de justification. Cet aspect est d'autant plus intéressant que c'est ce type de justification, par la construction de possibles explicatifs, qui est le plus souvent associé à une conjecture complète, ou du moins en accord avec la structure de la situation.

3. Les 24 "premiers" élèves sont ceux de la classe de CM1 qui n'a pas participé à cette tâche.

11.1.3 Analyse de la relation entre la nature de la conjecture et le type de justification utilisé

Nous avons classé les réponses des élèves sur l'expression de la conjecture en quatre catégories, réparties selon le graphique 11.2 :

1. Conjecture complète : l'élève donne pour le score du vainqueur les trois valeurs attendues, 7, 8 et 9 ;
2. Conjecture incomplète : l'élève donne pour le score du vainqueur une ou deux valeurs comprises entre 7 et 9 ;
3. Conjecture fausse : une ou plusieurs valeurs supérieures ou égales à 10 [4] ;
4. Pas de réponse ou hors sujet.

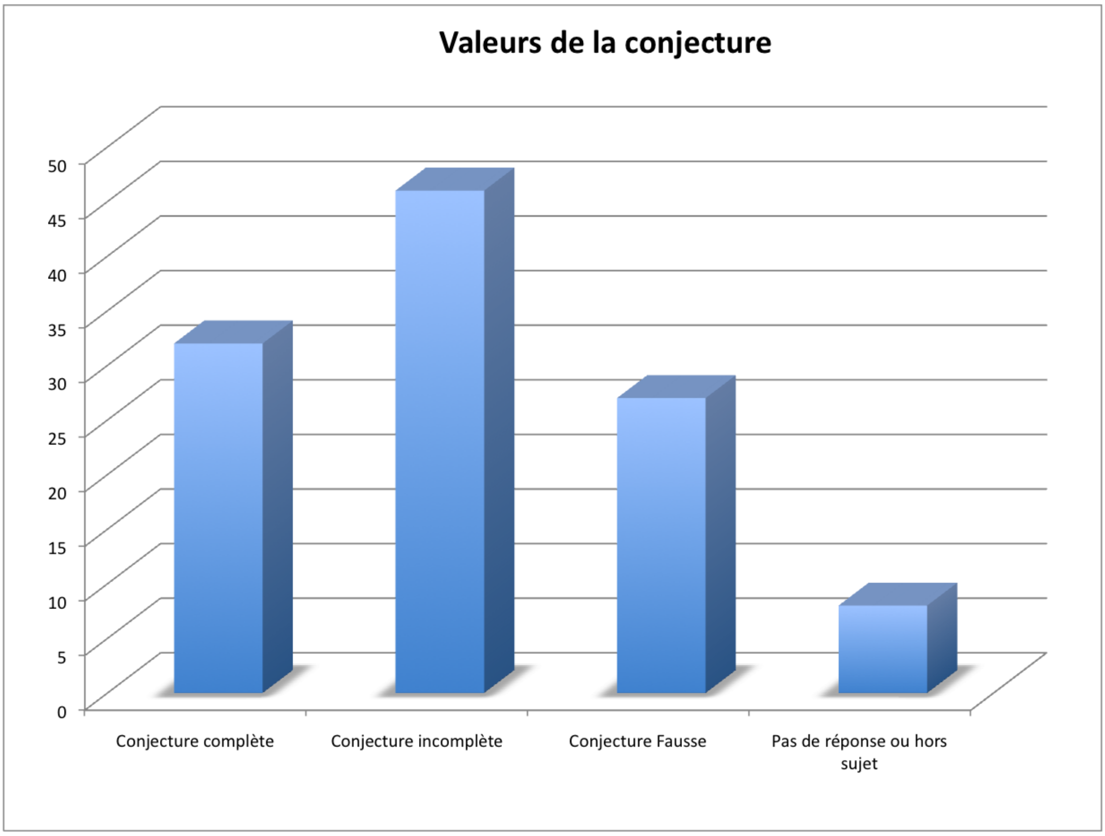


Figure 11.2 – Nature des conjectures

Ces résultats soulignent la difficulté de l'activité. Il n'est pas facile pour les élèves de se projeter pour émettre des conjectures. Nous l'avons indiqué, la majeure partie des conjectures complètes sont accompagnées de la production de possibles explicatifs.

4. La conjecture est considérée comme fausse même si l'élève propose également un score compris entre 7 et 9. Le fait de donner un score supérieur à 10 est en contradiction avec la structure de la situation

Sur 32 conjectures complètes, 27 sont en relation avec des possibles explicatifs (environ 85 %) ; sur 46 conjectures incomplètes, 29 sont en relation avec des possibles explicatifs (environ 60 %) ; sur 27 conjectures fausses, 13 seulement sont en relation avec des possibles explicatifs (moins de 50 %). Comme le montre le graphique ci-dessous, **le rapport de justifications basées sur la construction d'un possible explicatif augmente effectivement avec la validité de la conjecture effectuée.**

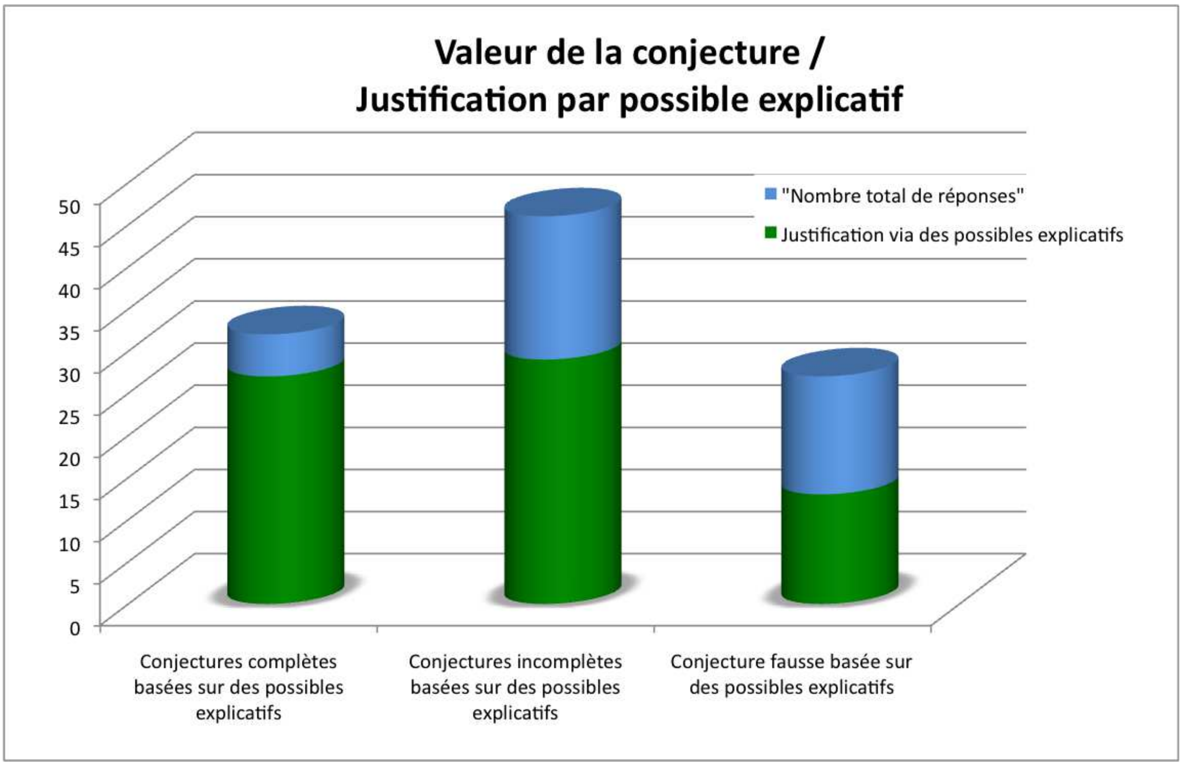


FIGURE 11.3 – Rapport de la valeur de la conjecture / Justification par possible explicatif

Nous n'avons pas mis en place de dispositif permettant de déterminer qui de la conjecture ou de la justification est construite en premier. Il serait cependant intéressant d'étudier la manière dont les élèves ont construit leur conjecture.

11.2 Analyse Tache 2 : inventer et raconter des parties imaginaires respectant une série de contraintes

Lors de cette seconde tâche, les élèves devaient "compléter" [5] un récit pour atteindre une score final déterminé.

11.2.1 *Ouverture* du milieu didactique

Nous l'avons signalé dans l'analyse *a priori* de cette tâche (*Cf.* Chapitre 10, Section 10.2.4), nous avons proposé deux versions de cette activité. Une première dans laquelle une seule étape était nécessaire pour terminer le récit (Version "à une étape"), une seconde dans laquelle, deux étapes étaient nécessaires (Version "à plusieurs étapes"). Dans les deux cas, nous avions caractérisé des *récits minimaux* (p. 191-192, des récits comprenant le nombre d'étapes minimum) et des *récits complexes* comportant plus d'étapes que nécessaire. Nous avions fait l'hypothèse que la nécessité de construire plusieurs étapes *ouvrait* le milieu didactique. Par ces termes nous entendions que dans la version "à une étape" les récits minimaux seraient privilégiés par les élèves. Alors que dans le version "à plusieurs étapes" les récit complexes pouvaient apparaître. Cela a effectivement été le cas comme en témoigne le graphique ci dessous :

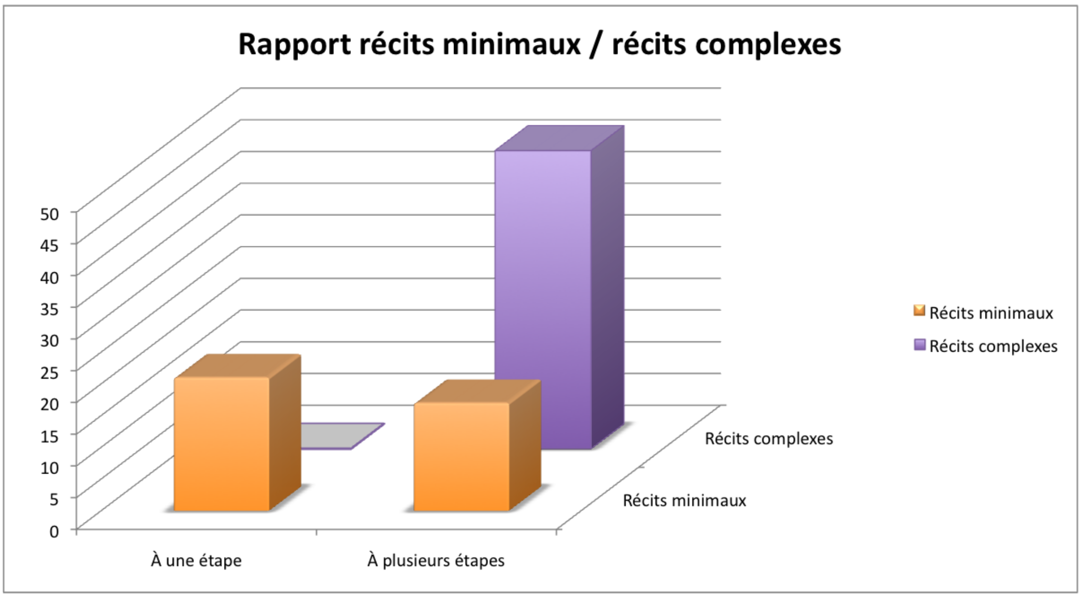


FIGURE 11.4 – Rapport *récits minimaux / Récits complexes*

5. Mot employé dans la consigne.

Dans le cas de la version à plusieurs étapes, pour produire des récits plus complexes, les élèves ont fait varier le score du perdant et ont autorisé des perte de point du joueur gagnant.

Ces résultats questionnent donc bien ce que nous avons appelé *l'ouverture* du milieu didactique. Dans les deux versions de l'activité, les élèves avaient la possiblité de construire des récits complexes. Plusieurs récits et réponses sont envisageables, les élèves ont le choix. Cependant, il semble que dans le cas où la réponse peut être immédiate (une seule étape), le *récit minimum* s'impose. L'élève semble moins libre de ses choix ; de son point de vue le milieu semble donc plus *fermé*. Traditionnellement, en résolution de problèmes, une seule réponse est possible. L'élève est alors face à un milieu qui est également *fermé* [6], il ne peut pas choisir entre plusieurs réponses valides. Dans la situation que nous avons construite, une infinité de réponses sont envisageables [7], les élèves ont le choix. Pourtant, dans la version à une étape, les élèves n'ont pas utilisé cette possiblité.

11.2.2 Gestion des impossibles explicatifs

Les élèves devaient construire quatre récits. Trois où le score du vainqueur était de 7, 8 puis 9, un où le score du vainqueur était de 10 points. Nous nous intéressons dans ce point à la gestion de ce dernier récit, un impossible explicatif [8].

De par les contraintes inhérentes aux conditions expérimentales, nous ne traitons pas les productions des élèves simultanément. Nous les avons regroupées en trois groupes :
- Un premier groupe, la classe CM1, qui était la seule à être confrontée à la situation "à une étape" ;
- Un second groupe, les classes CM2, CM3 et CM6, qui était confronté à la situation "à plusieurs étapes" et dont les élèves ont travaillé dans les conditions que nous avions choisies ;
- Un troisième groupe, les classes CM4 et CM5, qui était confronté à la situation"à plusieurs étapes" et dont les élèves ont travaillé, commme nous le verrons, dans des conditions différentes.

Version "à une étape"

Sur les vingt-et-un élèves présents :
- Neuf élèves ont pris en charge la construction d'un récit pour atteindre le score de 10 points. Quatre de ces élèves ont, par suite, effacé ou barré ce récit (dont deux qui ont explicitement ajouté que c'était "impossible"). Seulement cinq élèves affirment donc, en exhibant un récit, que la situation est possible.
- Cinq élèves ont laissé l'espace réponse vide sans explication. Ils ont pourtant eu le temps de traiter la question. Nous pouvons imaginer qu'il n'ont pas réussi à

6. Le milieu peut cependant rester ouvert du point de vue du choix de la méthode.
7. Nous n'avons en effet pas limité le nombre de manches possibles, sauf peut être par la taille du cadre réponse. Cependant, celui-ci permettait toujours d'envisager des réponses assez longues.
8. Il n'est pas possible de construire un récit, respectant la structure de la situation, permettant d'expliquer un tel score.

construire un récit répondant à la question sans aller jusqu'à affirmer que c'était impossible ou qu'ils n'ont pas réussi à justifier l'impossibilité.
- Neuf[9] élèves ont affirmé que c'était "impossible".
- Parmi ces neuf élèves, seul un élève a donné une justification mathématique[10].

La prise en charge de la construction d'un possible explicatif peut, au premier regard, ne pas sembler déterminante dans l'étude de cette situation. La moitié des élèves ayant construit un récit reste en contradiction avec la structure de la situation. Cependant, pour l'autre moitié des élèves, qui refuse ce possible explicatif, un premier travail de justification est entamé. Sans arriver à définir ce qui "bloque", ces élèves commencent à appréhender la structure de la situation. La question de la justification est difficile, seul un élève essaye de la prendre en charge, sans réussir totalement. **Nous pouvons donc souligner, en restant prudents, le rôle que joue le récit dans l'appréhension de la structure de la situation.** Placés comme nous l'avons montré dans le point précédent, dans un milieu didactique "plus fermé", les élèves n'ont pas pu tester la structure de la situation via la construction de récits complexes. Seul un élève l'a mis en évidence : "on ne peut pas marquer plus de 3 points" (par conséquent une fois le score de 6 atteint, on obtient, au maximum, un score de 9).

Version "à plusieurs étapes" avec récit

Sur un total de trente-cinq productions[11], vingt-cinq ont affirmé qu'il était impossible de construire un récit se terminant à 10 points (70% contre 40% dans la version "à une étape"), seulement 8 ont répondu que c'était possible en construisant un *impossible explicatif*[12] et 3 groupes n'ont pas répondu.

Nous nous intéressons ici aux justifications produites par les élèves. Les justifications produites ici ressemblent, au niveau de leur nature, à celles proposées par les élèves de la version "à une étape" :

- 14 justifications mathématiques (exemple ci-dessous) :

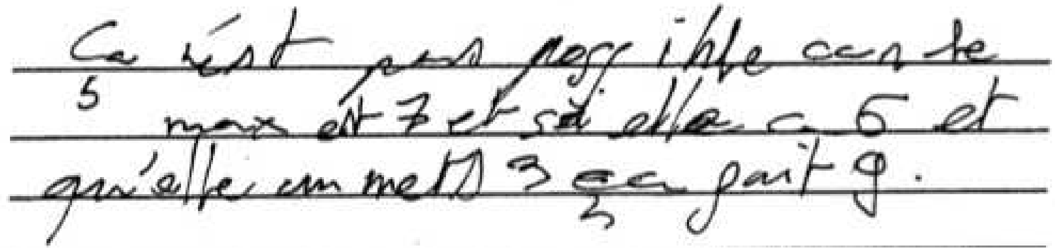
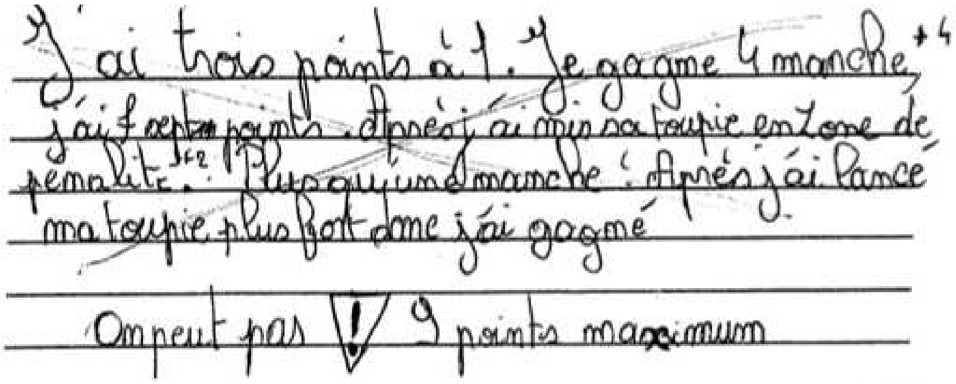


FIGURE 11.5 – Exemple de justification mathématique

9. Dont les deux élèves qui ont pris en charge un possible explicatif.
10. *On ne peut pas marquer plus de 3 points.*
11. Soixante-et-onze élèves répartis en trente-cinq groupes ont étés confrontés à cette situation.
12. Un récit qui ne respecte pas la structure de la situation.

– 8 justifications par des possibles explicatifs effacés ou barrés (exemple ci-dessous) :


~~J'ai trois points à 1. Je gagne 4 manche +4 j'ai sept points. Après j'ai mis sa toupie en zone de pénalité. +2 Plus qu'une manche ! Après j'ai lancé ma toupie plus fort donc j'ai gagné~~

On peut pas ! 9 points maximum

FIGURE 11.6 – Exemple de justification par un possible explicatif barré

– 8 justifications par des impossibles explicatifs (exemple ci-dessous) :

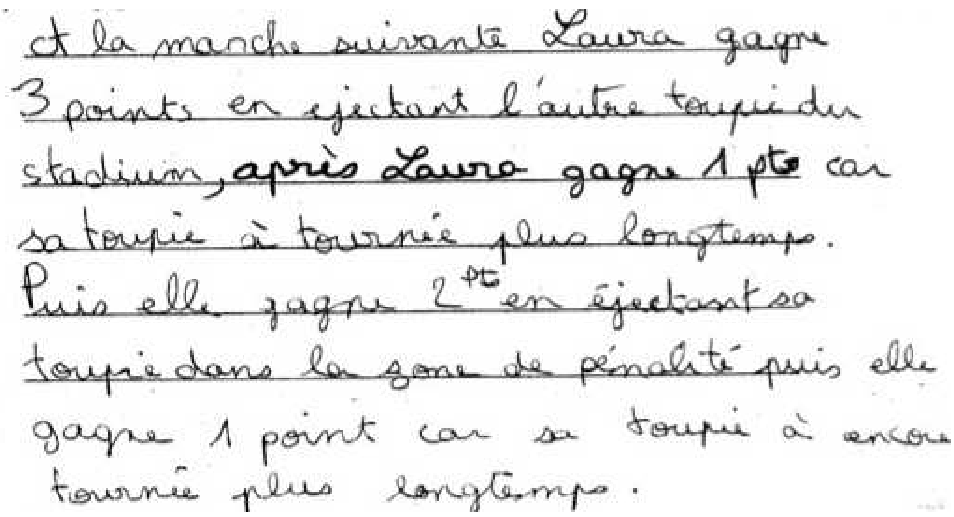

et la manche suivante Laura gagne 3 points en éjectant l'autre toupie du stadium, après Laura gagne 1 pts car sa toupie à tournée plus longtemps. Puis elle gagne 2 pts en éjectant sa toupie dans la zone de pénalité puis elle gagne 1 point car sa toupie à encore tournée plus longtemps.

FIGURE 11.7 – Exemple de justification par un impossible explicatif

Les illustrations que nous proposons pour cette version "à plusieurs étapes", dans le cas des impossibles explicatifs, sont similaires à celles proposées lors de la version "à une étape". Le gagnant dépasse les sept points : la partie devrait être terminée. Les élèves continuent cependant le déroulement. On peut se demander si c'est parce qu'ils ne font pas attention au score et ne se rendent pas compte que la partie est terminée. Nous pourrions alors émettre l'hypothèse que ces élèves ont commencé par déterminer la valeur de la transformation à produire, puis, dans un second temps, cherché une succession d'évènements permettant de l'obtenir. Ou si, tout en étant conscients que la partie est terminée, ils continuent tout de même leur récit pour répondre à la question. Nous serions alors dans l'hypothèse d'une influence forte du *contrat didactique* (Brousseau, 1998). L'élève contourne les règles du jeu, détourne la situation pour donner une réponse à la question du professeur.

Un groupe d'élève semble d'ailleurs exprimer cette idée très clairement en indiquant "*Laura gagne la partie mais elle veut avoir plus de points donc elle continue*" (Exemple ci-après). La question se pose : est-ce que certains des élèves ayant proposé un impossible explicatif ont voulu répondre à la question bien qu'ils se soient rendus compte qu'ils contredisaient la structure de la situation ? Nous ne sommes pas en mesure d'affirmer ou d'infirmer cette proposition.

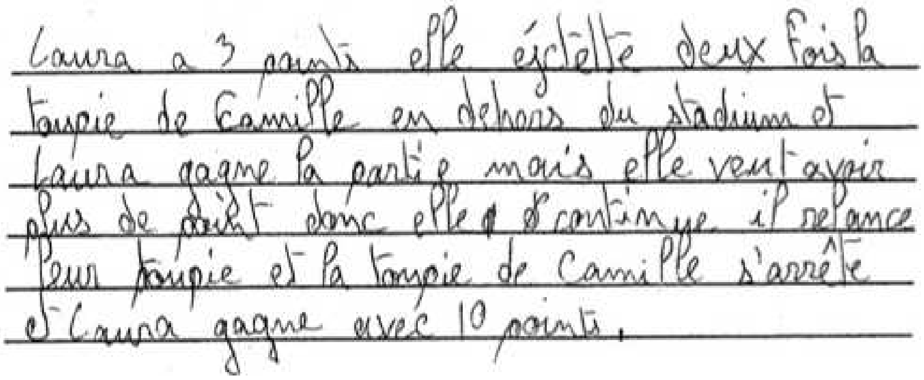

Laura a 3 points elle éjectète deux fois la toupie de Camille en dehors du stadium et Laura gagne la partie mais elle veut avoir plus de point donc elle continue il relance leur toupie et la toupie de Camille s'arrête et Laura gagne avec 10 points.

FIGURE 11.8 – Exemple de partie poursuivie malgré un score de 9 points

Nous avons représenté, dans le graphique ci-dessous, la répartition des justifications proposées par les élèves. Elle met en évidence une importante prise en charge de justifications mathématiques (comparé à la version "à une étape") en violet.

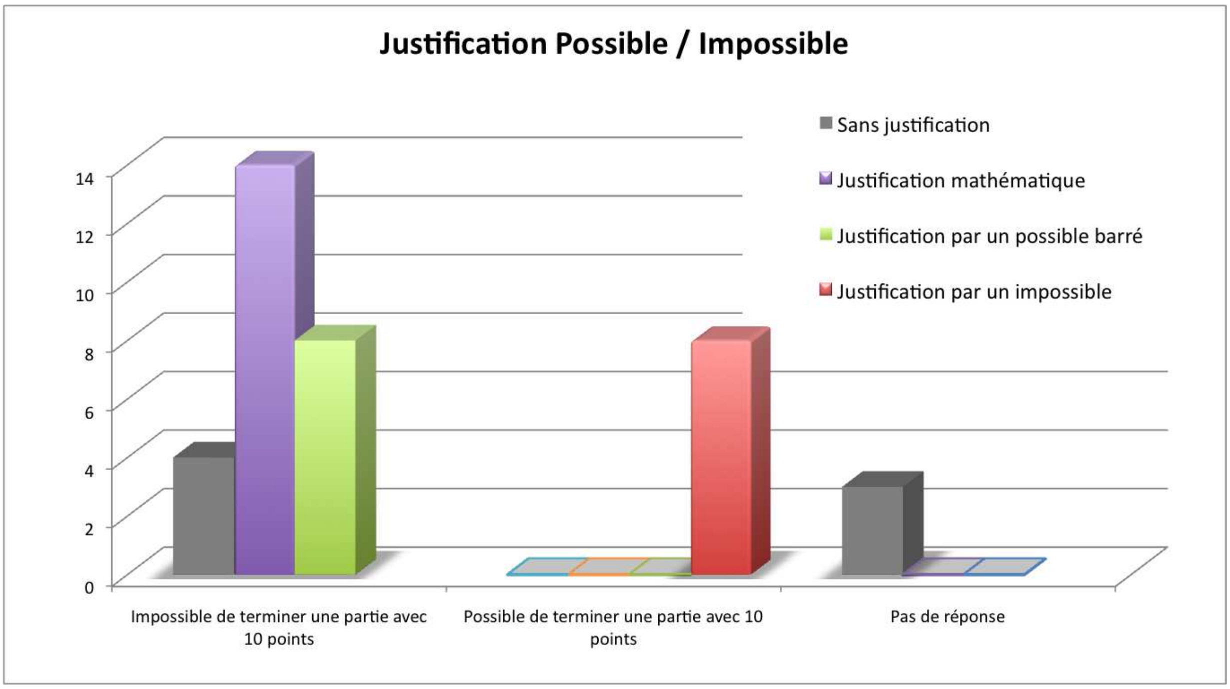


FIGURE 11.9 – Justifications possibles / impossible

Ces résultats vont dans le sens de l'hypothèse que nous avons formulée dans le point précédent (Version à "une étape", p. 208). **Le fait de pouvoir envisager une multitude de possibles** explicatifs dans les questions précédentes (parties en 7, 8 et 9 points),

de pouvoir choisir entre plusieurs possibilités, permet aux élèves de mieux appréhender la structure de la situation, et donc ici, de construire une justification mathématique.

Nous poursuivons dans la section suivante (11.3), ce travail d'analyse des justifications. En nous basant sur les productions de ce groupe d'élèves, nous analysons l'interaction entre le travail réalisé dans cette tâche et les valeurs de conjectures exprimées lors de la première tâche. Avant, nous nous intéressons au travail produit par les deux autres classes.

Version "à plusieurs étapes" sans récit

Nous l'avons signalé dans l'introduction de ce chapitre, les classes CM4 et CM5 présentent beaucoup d'élèves en difficulté scolaire. Ils ont en particulier des difficultés à écrire et rédiger. Par conséquent, lors de la seconde séance de l'expérimentation, les élèves ont passé beaucoup de temps à réfléchir sur la tâche 1, l'élaboration de conjectures. Le temps restant pour la séance étant limité, nous avons fait le choix, en suivant l'intuition de l'enseignant, de permettre aux élèves de ne pas construire de récit mais d'indiquer seulement les scores obtenus à chaque manche comme dans l'exemple ci-dessous. Cette décision, en contradiction avec les principes de notre approche, nous permet cependant de mettre en avant quelques résultats intéressants par rapport au récit.

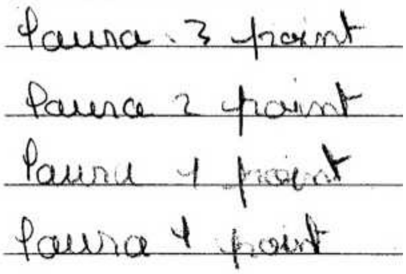

laura 3 point
laura 2 point
laura 1 point
laura 4 point

FIGURE 11.10 – Exemple avec scores uniquement

Le bilan de la réalisation de cette tâche sans la dimension récit est simple : les élèves n'ont pas réussi à appréhender la structure de la situation. Ils ont tous produit une suite de scores permettant d'atteindre dix points. On pourrait objecter que la tâche était trop complexe pour ces élèves en difficulté. Cependant – au vu des réponses fournies lors de la tâche précédente qui sont équivalents à ceux des autres classes – nous pouvons faire l'hypothèse que la perte de la dimension récit est responsable pour une partie des élèves de ces résultats. La prise en charge des scores est nécessaire, mais elle ne semble ici pas suffisante.

Le récit semble permettre aux élèves d'approfondir leur connaissance des propriétés de la situation. Il prend en charge des éléments de structure plus complexes qu'une simple suite de scores. Nous verrons d'ailleurs, lors de l'analyse des phases de débat à l'oral, que c'est en prenant en charge la construction de ces possibles explicatifs que les élèves réussissent à appréhender la structure de la situation (Section 11.4).

11.3 Analyse des interactions entre les deux tâches

Nous analysons ces possibles interactions au travers des productions des élèves des classes CM2, CM3 et CM6. La classe CM1 n'a pas participé à l'émission de conjectures, les élèves des classes CM4 et CM5 n'ont pas réalisé la seconde tâche dans les conditions souhaitées.

11.3.1 Rapport entre l'établissement de la conjecture et la possibilité / l'impossibilité de construire un récit de partie se terminant à 10 points

Lors de l'analyse *a priori* de notre expérimentation, nous avions fait plusieurs hypothèses sur de possibles interactions entre les deux tâches principales (p. 194). Nous nous intéressons ici à la relation entre la conjecture proposée lors de la première tâche et la possibilité / impossibilité de construire une partie se terminant à 10 points. Par rapport aux hypothèses exprimées ci-dessus, nous testons la validité de la dernière hypothèse exprimée : *Nous faisons l'hypothèse que la confrontation entre les conjectures proposées par les élèves dans la première tâche et la construction des possibles explicatifs dans la seconde devrait permettre aux élèves ayant imaginé que tous les scores au dessus de sept étaient possibles, de remettre en cause leur hypothèse lors de la résolution du quatrième problème (celui où le vainqueur doit avoir 10 points).*

- Sur les 26 élèves ayant établi la conjecture complète lors de la tâche 1 :
  - 21 ont exprimé l'impossiblité de construire une partie se terminant sur un score de 10 points ;
  - 4 n'ont pas construit de récit de partie ;
  - 1 a construit un récit de partie.

- Sur les 25 élèves ayant établi une conjecture incomplète lors de la tâche 1 :
  - 14 ont exprimé l'impossiblité de construire une partie se terminant sur un score de 10 points ;
  - 7 n'ont pas construit de récit de partie ;
  - 4 ont construit un récit de partie.

- Sur les 22 élèves ayant établi une conjecture fausse lors de la tâche 1 :
  - 18 ont exprimé l'impossiblité de construire une partie se terminant sur un score de 10 points ;
  - 3 n'ont pas construit de récit de partie ;
  - 3 ont construit un récit de partie.

Le travail effectué lors de la construction de récits de parties se terminant sur un score de 7, 8 ou 9 semble avoir permis aux élèves de mieux appréhender la structure de la situation. En effet, les élèves ayant établi la conjecture lors de la première tâche confirment en affirmant à plus de 80% qu'il est impossible de de construire une partie se terminant sur un score de 10 (Ce taux monte à plus de 95% si on considère que la non construction d'un récit de partie est le signe d'une impossibilité constatée par l'élève). La tendance est la même pour les élèves ayant établi une conjecture incomplète. Plus de la moitié de ces élèves affirme l'impossiblité. Seuls 4 élèves ont produit un impossible explicatif.

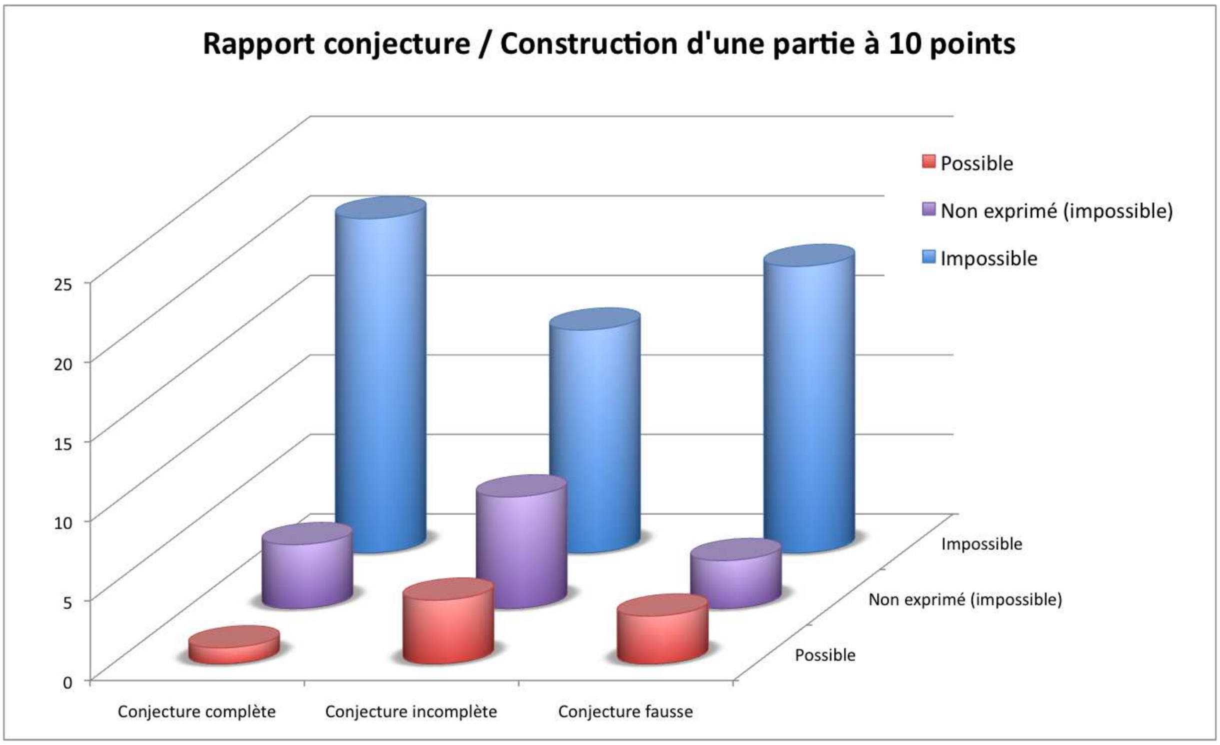


FIGURE 11.11 – Justifications possible / imposible

FIGURE 11.12 – Rappport la nature de la conjecture / Construction d'une partie à 10 points

Comme en témoigne le graphique ci-dessus, la progression d'une activité à l'autre est évidente pour les élèves ayant établie une conjecture fausse (c'est à dire en proposant une valeur de score supérieur à 10). Plus de 80% d'entre eux ont déclaré qu'il était impossible de construire le récit de partie.

11.3.2 Mise en place des justifications mathématiques

Nous l'avons déjà exprimé à plusieurs reprises, la construction des différents récits de parties lors de la seconde tâche a permis aux élèves d'appréhender la structure de la situation. Pour confirmer cette hypothèse, nous analysons la nature des explications proposées pour justifier l'impossiblité de construire une partie se terminant sur un score de 10 points.

Lors de l'établissement de la conjecture, toutes les justifications ont été construites par des démonstrations d'existance. Les élèves ont proposé des exemples (réels ou imaginés) de parties se terminant sur des scores de 7, 8 et 9. Aucune preuve mathématique n'a été mise en œuvre (Graphique 11.1, p. 203).

Lors de la seconde tâche, quatorze productions (23 élèves concernés) ont mis en place une preuve mathématique. Elles reposent toutes sur l'argument suivant : une fois que le score de 6 points est atteint (maximum avant de gagner), il est possible de gagner au maximum trois points (Exemple ci-dessous).

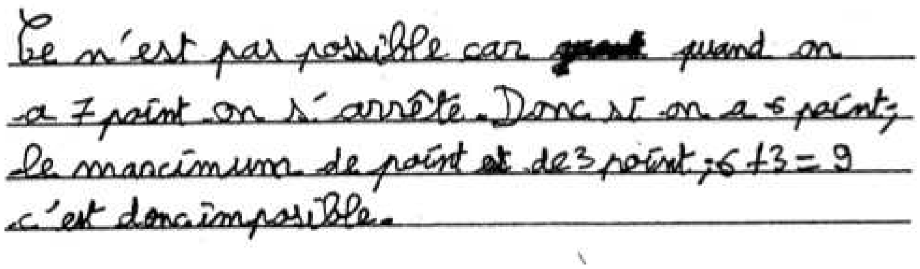

Ce n'est par possible car quand on
a 7 point on s'arrête. Donc si on a 6 point;
le maxcimum de point est de 3 point; 6+3 = 9
c'est doncimpossible.

FIGURE 11.13 – Exemple de preuve mathématique

Il s'agit pour la majeure partie d'élèves ayant réalisé auparavant une conjecture complète. Ce qui nous paraît intéressant, au delà de la validité de ces preuve, c'est l'investissement de ces élèves dans la production d'une preuve. Le milieu, que nous avons construit autour du récit, semble suffisament contraignant, au sens proposé par (Hersant, 2010b), [13], pour amener chez ces élèves la nécessité de construire une preuve.

Pour poursuivre sur cette question de la preuve, nous abordons maintenant, l'analyse des phases de productions orales. Dans toutes les classes, ces échanges ont été l'occasion pour les élèves de s'appuyer sur le récit pour construire des preuves.

13. *Cf.* Chapitre 8, Section 8.2, p. 134.

11.4 Analyse des phases orales : débat sur le nombre de manches dans une partie

Nous nous intéressons à présent aux phases de débats. Dans les six classes, elles ont eu lieu lors de la deuxième séance, après les phases écrites que nous venons d'analyser. Auparavant les élèves ont donc (excepté pour la classe CM1) construit et justifié des conjectures sur le score du vainqueur et le nombre de manches minimum. Ils ont ensuite tous construit des récits répondant à des contraintes mathématiques sur le score du vainqueur. Dans les classes CM2, CM3 et CM6, de par la quantité de travail engagée sur la question du score du vainqueur (lors de la tâche 1), la correction de la première conjecture (sur les scores) a été rapide. Dans les classes de CM1, CM4 et CM5, la correction a pris plus de temps. Cependant les élèves ont réussi à produire des démonstrations similiaires à celles que nous avons évoquées dans le point précédent. Ils se sont pour cela appuyés sur la construction de possibles explicatifs.

Dans cette section, nous nous concentrons sur l'établissement de conjectures à propos du nombre minimum et maximum de manches dans une partie. En début de séance, à l'écrit, nous avons demandé aux élèves des classes CM2 à CM6 d'établir et de justifier une conjecture sur le nombre de manches nécessaires pour terminer une partie. Lors de la correction à l'oral, ce sont en fait deux questions qui ont été posées aux élèves :

1. Quel est le nombre de manches nécessaires pour terminer une partie ?
2. Quel est le nombre maximum de manches que l'on peut jouer dans une partie ?

La première question n'a pas fait l'objet d'un travail supplémentaire à l'écrit (en production de récits) dans les classes CM2 à CM6. La seconde question n'a été, quant à elle, abordée à l'écrit dans aucune classe. Nous traitons cette phase de débat, de la même manière dans les six classes, comme si la question du nombre de manches minimum n'avait pas encore été posée. Pour favoriser les échanges, nous n'avons pas proposé de trame précise aux enseignants sur cette séance, les laissant ainsi maîtres de la progression. Nous recherchons dans les interactions entre élèves, et avec l'enseignant, la construction et la prise en charge de *possibles explicatifs*.

11.4.1 Méthodologie

Nous travaillons à partir des transcriptions que nous avons réalisées suite aux enregistrements audio des six séances (Transcriptions complètes en annexe I, p. 298-319). Pour analyser ces transcriptions nous avons procédé à un découpage en épisodes. Chacun d'entre eux est centré autour d'une question posée par l'enseignant. Nous sommes ainsi en mesure de repérer le type de demande de l'enseignant (analyse, conjecture, justification, exemple). En regard, nous étudions le type de réponse proposé par les élèves.

Nous avons ainsi pu dresser une liste d'épisodes pour chacune des classes. Nous présentons ces listes en annexe J (p. 325). Dans cette même annexe, nous proposons également une schématisation des débats sous formes d'organigrammes. Cette représentation nous permet de décrire dans chaque classe le déroulement du débat :

– Les questions de l'enseignant y sont représentées dans des éllipses :

FIGURE 11.14 – Questions enseignants

Nous avons ainsi repéré six types de questions récurrentes dans toutes les classes :

Question sur une partie réelle : *Combien y a-t-il eu de manches dans les parties que vous avez jouées ?* (CM1 - Episode 1).

Demande de conjecture : *Combien y a-t-il de manches au minimum dans une partie ? D'abord je veux les avis.* (CM4 - Episode 1).

Demande de conjecture à partir de parties réelles : *Au maximum vous avez fait quatorze manches, est ce qu'on aurait pu en faire plus ?* (CM3 - Episode 3).

Demande de justification : *Est-ce que quelqu'un peut m'expliquer pourquoi on peut aller jusqu'à l'infini* (CM2 - Episode 6).

Demande d'exemple : *Si tu racontes l'histoire, ça se passe comment ?* (CM3 - Episode 9).

Question d'approfondissement : *Est-ce qu'elle est obligée de gagner trois points à la dernière manche pour gagner ?* (CM5 - Episode 2).

– Les réponses des élèves sont représentées dans diverses formes en fonction du type de réponse proposée. Nous n'avons pas cherché à produire une méthodologie valide dans d'autres types de situations. Il s'agissait pour nous de mettre en évidence la nature de la réponse proposée par rapport au récit. Nous pouvons ainsi déterminer le rôle du récit dans ces échanges et dans le travail de construction et de justification de conjectures.

11.4.2 Anticipation d'épisodes caractéristiques

Au regard des questions de l'enseignant et des formes d'utilisation du récit définies dans nos hypothèses (p. 193), nous sommes en mesure de caractériser les possibilités d'interactions entre la construction et la justification de conjectures et l'utilisation et la construction de *possibles explicatifs* au travers du récit :

- **Faire référence à un récit de partie réelle** pour :
  - S'engager dans l'émission d'une conjecture en anticipant sur des résultats de parties potentiellement réalisables au regard des parties effectivement jouées.
  - Proposer un exemple (ou un contre-exemple) permettant de valider (ou d'invalider) une conjecture ; la validation (ou non validation) se fait par confrontation entre le récit et les contraintes de la question.

- **Construire un récit de partie imaginaire** pour :
  - Émettre une conjecture en construisant un possible explicatif ;
  - Produire un exemple (ou un contre exemple) pour valider (ou invalider) une conjecture ; La validation (ou non validation) se fait par confrontation entre le récit, la structure mathématique de la situation et les contraintes de la question.

Pour la première question (sur le nombre minimum de manches) les élèves devraient ainsi être en mesure d'imaginer un récit de partie en trois manches. Ils montreraient alors qu'il est effectivement possible de terminer une partie en trois manches. On peut également penser que, la structure de la situation (avec l'impossibilité de gagner plus de trois points par manche) devrait entrer en contradiction avec la possibilité de raconter une partie en deux manches. **La fonction problématisante et structurante du récit ainsi devrait permettre aux élèves de prouver que le nombre minimum de manches pour terminer une partie est de trois.**

Pour la seconde question (sur le nombre maximum de manches), les élèves doivent envisager la possiblité théorique d'une partie infinie. **Dans le cadre du récit, les élèves seront libres d'imaginer des parties de plus en plus longues. Le caractère fictionnel du récit et la fonction d'explication en particulier peuvent permettre aux élèves de s'affranchir de la réalité pour envisager un nombre maximum de manches de plus en plus élevé. De par le caractère structurant du récit, ils peuvent de plus appréhender la structure de la situation.**

Pour chaque épisode, nous avons donc caractérisé l'utilisation du récit, lorsqu'elle existe. Ainsi nous sommes en mesure de définir effectivement des épisodes caractéristiques pour l'utilisation du récit dans la construction et la justification de conjectures.

11.4.3 Analyse des épisodes caractéristiques

La découpage en épisodes et la caractérisation de l'utilisation du récit nous permettent de définir des épisodes caractéristiques. Nous avons distingué dans notre analyse trois classes d'épisodes :

- **L'utilisation d'un récit de partie réelle** : Du fait de leur nature, ces récits respectent toujours la structure de la situation. Les élèves les ont convoqués en particulier en tant qu'exemple ou contre-exemple.

- **La construction progressive d'un récit de partie imaginaire** : Il s'agissait pour les élèves de produire un récit répondant aux contraintes fixées par leur enseignant ou par eux mêmes. Leur conformité avec la situation a eu besoin d'être validée mais permet aux élèves d'envisager des possibles et de construire de nouvelles conjectures.

– **L'utilisation d'un récit de partie imaginaire** : Comme dans le cas des récits de parties réelles, ces récits sont convoqués en tant qu'exemple ou contre-exemple. Une fois construits et validés (il est nécessaire de vérifier la validité d'un récit de partie imaginaire), ils ont pour les élèves la même force que les récits de parties réelles.

11.4.3.1 Utilisation des récits de parties réelles

Il s'agit d'étudier la manière dont les élèves (ré)utilisent les récits de parties qu'ils ont rédigés dans les séances précédentes. Les élèves ont, en amont de cette séance, joué et raconté une partie. Récit qu'ils ont ensuite comparé avec ceux de leurs camarades en s'attachant à définir des points communs et des différences entre les parties.

Utilisation d'un récit en tant que contre-exemple :

Un élève conjecture que le nombre de manches d'une partie ne peut pas être supérieur à 7. Un élève rappelle alors que dans une des parties jouées, deux élèves ont fait 14 manches, invalidant ainsi la conjecture.

> – *Au bout de sept manches la partie est forcément terminée ?*
> – *Valentin et Clément ont fait 14 manches.*
>
> *(CM6 - Épisode 8)*

Le contre-exemple est amené par le rappel du récit présenté par deux élèves de la classe. La situation finale de ce récit (Valentin et Clément ont fait 14 manches) devient alors un élément d'argumentation contre une conjecture erronée. Ce type d'argument est présent à plusieurs reprises dans les différentes classes [14].

Utilisation d'un récit en tant qu'exemple :

Un évènement utilisé pour produire une conjecture est mis en doute. Le récit d'une partie réelle permet alors de prouver à toute la classe que cet évènement peut effectivement se produire :

14. Par exemple en *CM2 - Épisode 4*, un élève propose 11 en nombre de manches maximum et un élève lui indique que lui en a fait 12.

– *Est-ce que c'est possible [de marquer trois points d'un coup] ?*
– *Y a Hugo qui m'a éjecté.*

(CM6 - Épisode 6)

Le récit de la partie d'Hugo montre à ses camarades la possibilité d'occurrence de l'évènement mis en doute. Ce qui convainc les autres élèves, ce n'est pas le retour aux règles du jeu mais bien l'évènement raconté. Il met en évidence la relation entre le fait de gagner trois points d'un coup et le fait d'éjecter la toupie de son adversaire. Il permet ainsi de prouver l'existence d'un évènement utilisé dans la conjecture d'un autre élève. L'exemple est validé.

Utilisation des points communs entre les récits de la première séance

Les élèves n'ont pas toujours utilisé un seul récit à la fois. Ils ont également repéré des régularités dans le déroulement des parties et ainsi défini ce que nous pouvons appeler des conditions d'existence (ou non) de certaines successions d'évènements. Concernant la possibilité théorique d'obtenir une partie infinie, dans les exemples ci-dessous que les élèves s'attachent dans un premier temps, aux parties qu'ils ont réalisées :

– *La partie où il y a eu le plus de manches c'est la partie a trois joueurs, à deux ce n'est pas possible [d'en faire autant] (CM1 - Épisode 3)*
– *Ca s'arrête à un moment (CM1 - Épisode 2) ;*
– *Y a pas assez de temps (CM2 - Épisode 5) ;*
– *Quand tu lances tu gagnes des points (CM2 - Épisode 5) ;*
– *Ce n'est pas possible parce qu'au bout d'un moment c'est obligé qu'une toupie marque des points (CM3 - Épisode 10).*

On peut remarquer qu'il ne s'agit pas ici d'impossibles mathématiques. Ce sont les faits et les circonstances qui empêchent les élèves d'envisager, dans un premier temps, un autre déroulement. Cette démarche se rapproche de ce que nous avions envisagé comme une anticipation des parties potentiellement réalisables. Pour pouvoir proposer des conjectures, les élèves doivent se détacher des parties réelles. Comme nous le montrons dans le point suivant, cest la construction de récits de parties imaginaires qui leur a permis de le faire comme nous le verrons dans les points suivants.

Les élèves ont, comme nous l'avons imaginé, mis en jeu à l'oral leurs récits (écrits) de parties réelles. Ils ont pointé différents aspects caractéristiques de leurs récits : la situation finale présentant les scores et le nombre de manches, l'occurrence d'un évènement, la succession des évènements, les habitudes de jeu permettant d'expliquer le déroulement de la partie. Ils ont effectivement utilisé leurs récits comme des éléments d'argumentation (positifs ou négatifs) grâce à la proposition d'exemples ou de contre-exemples. Ils ont également déterminé des conditions d'existence et de non existence d'une situation. Ainsi, comme nous en avions fait l'hypothèse, les élèves s'appuient sur les parties réelles pour contrôler des résultats, via des exemples et des conditions d'existence. De plus, ils utilisent ces récits comme des exemples pour justifier leurs conjectures.

11.4.3.2 Construction de récits de parties imaginaires

Nous n'avons pas les moyens de distinguer dans ces débats les processus d'utilisation de parties imaginaires des processus de construction. Nous nous appuyons donc dans les deux points suivants sur les mêmes extraits de transcription. Dans ce premier point, nous proposons d'analyser la manière dont les élèves ont construit, durant les séances de débat, ces récits de parties imaginaires. Nous nous intéressons dans le point suivant à leur utilisation en tant que *possible explicatif*. Nous avons repéré trois manières de produire un récit de partie imaginaire :

Méthode 1 : En partant d'un récit écrit d'une partie réelle, l'élève remplace un évènement par un autre pour satisfaire aux conditions qui l'intéressent.

> Par exemple, pour déterminer le nombre minimum de manches à réaliser, un élève propose une variation qui fait gagner plus de points en une manche à son personnage : *dans la première manche, au lieu de marquer un point, elle en marque deux.*
>
> *(CM1 - Épisode 7)*

Ainsi, les points s'accumulent plus vite et la partie est plus courte. La production du récit imaginaire permet d'envisager une partie comportant moins de manches. À l'inverse, en proposant un évènement faisant perdre des points, la partie s'allonge :

> *Si celui qui avait six manches avait fait moins un [à une manche] ils auraient du faire quinze manches [au lieu de quatorze]*
>
> *(CM3 - Épisode 6)*

On est bien ici dans la production de récits de parties imaginaires, même s'il ne s'agit que d'une légère modification. La prise en compte de la demande de l'enseignant, déterminer le nombre minimum ou maximum de manche, amène l'élève à reconsidérer la succession des évènements.

Méthode 2 : En construisant, du début à la fin une suite d'évènements comme lors de la seconde tâche proposée aux élèves.

Méthode 3 : En construisant une suite d'évènements en répétant à l'infini un évènement. Celui-ci peut s'inspirer d'un évènément caractéristique d'une partie réelle, ou à l'inverse ne s'appuyer sur aucune partie réelle :

Valentin lançait tout le temps à côté (...) si l'adversaire lance tout le temps à côté personne ne gagne de points.

(CM6 - Épisode 9)

À chaque fois on fait moins trois.

(CM2 - Épisode 4)

Les deux récits ainsi construits permettent d'engendrer une partie infinie.

11.4.3.3 Utilisation d'un récit de partie imaginaire

Les deux questions, celle du minimum et celle du maximum ne se démontrant pas de la même manière, nous les traitons séparément.

Conjecture via un récit de partie imaginaire - Nombre minimum de manches

Comme nous l'imaginions, c'est la construction d'un récit de partie imaginaire en trois manches qui permet aux élèves de conjecturer sur le nombre minimum de manches. Dans les parties qu'ils avaient réalisées, aucune partie ne comprenait moins de 5 manches. Ainsi, en utilisant la première méthode de construction que nous avons présentée, ils ont fait diminuer le nombre de manches en faisant gagner plus de points aux deux joueurs, devenus les personnages de leur récit. Par suite, ils ont été capables d'inventer directement des récits en trois manches :

- En proposant une suite de scores : *Trois trois un ou trois trois deux (CM1).*
- Par succession d'évènements : *On peut faire (...) trois manches aussi. Si on fait trois manches. On fait trois, trois, ça fait déjà six et on prend un point (CM2) ; Elle est à trois points, trois et trois six et un (CM3).*
- *Par répétition d'une manche : On peut faire trois fois trois égal neuf (...) en trois manches (...) chaque manche on met trois points (CM3).*

Ces productions, même si elles n'en ont pas forcément l'air, sont effectivement des récits. La succession de scores proposée est construite dans l'objectif de répondre à l'élément problématique. Les évènements sont organisés de manière à produire une partie en trois manches. Les élèves imaginent ainsi des *possibles explicatifs* et les utilisent pour justifier leur conjecture. .

Confrontation entre la structure du récit et la structure mathématique - Nombre minimum de manches

Pour justifier qu'une partie ne pouvait pas se terminer en deux manches, **les élèves ont confronté la structure d'un récit en deux manches à la structure de la situation. Ainsi, le récit leur permet d'envisager la situation et de déterminer les conditions de faisabilité.**

Pour atteindre un score de sept points en 2 manches, il faudrait pouvoir gagner au minimum 4 points dans une des manches. C'est un évènement qui est impossible à réaliser en respectant les règles du jeu et donc la structure mathématique et logique de la situation.

> *Trois minimum, parce que c'est ... on ne peut pas faire deux parce que ... Pour faire en deux manches il faudra ... y a quoi qui fait trois, quatre y a pas (...) il faudrait quelque chose qui fait (...) 4 points et y a pas.*
>
> *(CM4 - Épisode 4)*

On voit que l'élève essaye de construire un récit de partie (*Pour faire en deux manches (...) il faudrait quelque chose qui fait (...) 4 points*) qu'il confronte immédiatement à la structure de la situation (*mais y a pas*). **L'impossibilité de construire le récit lui permet également d'expliquer pourquoi** le nombre de manches minimum est effectivement trois.

Conjecture via la construction d'un récit de partie imaginaire infinie - Nombre maximum de manches

Ici, il n'est pas possible de s'appuyer sur un récit construit grâce à une suite de manches (Méthode 3). C'est donc, en déterminant la structure du récit, que les élèves peuvent argumenter. Ils ont pour cela construit trois types de structures :

- **Annulation de scores grâce à des évènements opposés :**
  - *On aurait pu faire plus un moins un, plus un moins un (CM1).*
  - *Il gagne trois points en éjectant et après il touche le stadium, il a zéro (...) Il tourne plus longtemps et après il lance à coté (CM2).*
  - *Si on gagne un point et si on en perd un ; ça fait plus un moins un (CM3).*
- **Succession d'évènements permettant de perdre des points :**
  - *Parce qu'à chaque fois on fait moins trois (CM2).*
  - *On peut faire des moins (CM3).*
- **Construction d'un cycle :**
  Plus trois, moins un, plus deux (...) il a quatre, moins trois et moins 1 et il se retrouve à zéro. (CM1 - Épisode 6).

On peut voir que les scores prennent de plus en plus de place dans les productions des élèves. Il reste des récits uniquement leur structure. **C'est en produisant cette structure que les élèves construisent une succession d'évènements organisée autour d'une problématique mathématique :** comment faire durer une partie le plus longtemps possible ?

Ces résultats nous permettent de caractériser, comme nous le souhaitions, le récit comme un support de la pensée dans la construction et la justification de conjectures. **En intégrant le récit dans le milieu didactique, nous amenons les élèves à s'affranchir de la réalité pour raisonner dans un univers abstrait. La prise en charge d'un possible ou impossible explicatif, via la construction d'un récit,**

leur permet de raisonner et ainsi de conjecturer et d'entrer dans une démarche preuve. La référence au réel (les parties effectivement jouées) reste cependant présente chez les élèves. Lors de l'exploration de parties infinies certains d'entre eux ont objecté en s'appuyant sur la réalité.

Moi je dis que c'est pas possible parce qu'au bout d'un moment y aura ... c'est obligé qu'il y ait une toupie qui marque des points (CM2).

C'est ici, la répétition d'évènements plutôt rares dans la réalité (la perte de points) qui interpelle les élèves. Il semble difficile d'imaginer une partie où personne ne marque de points. Par exemple, dans les deux épisodes représentés ci-dessous (classes de CM2 et CM3), un élève se raccroche à des parties réelles pour argumenter contre l'idée qu'il est possible d'envisager une partie infinie : "*il n'y a pas assez de temps*", *c'est pas possible parce qu'au bout d'un moment, c'est obligé qu'une toupie marque des points.* L'enseignant, en le replaçant dans un "monde imaginaire" ou en supprimant la contrainte du temps permet aux élèves d'accepter la conjecture.

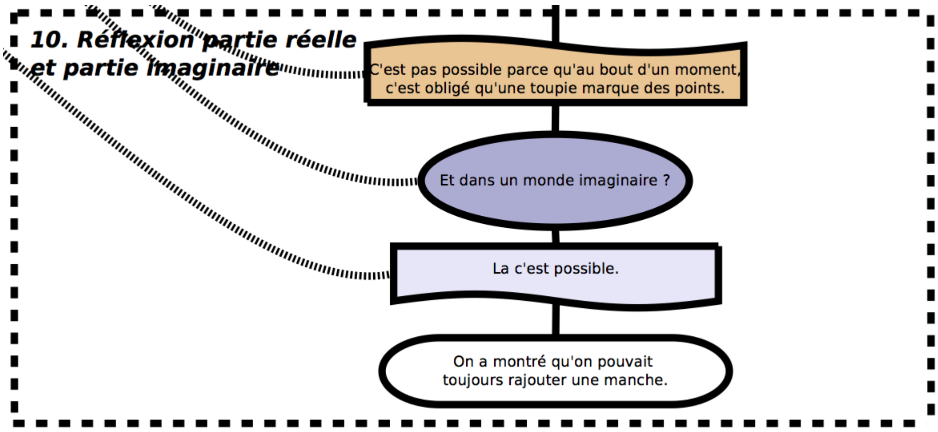


FIGURE 11.15 – CM2 - Episode 10

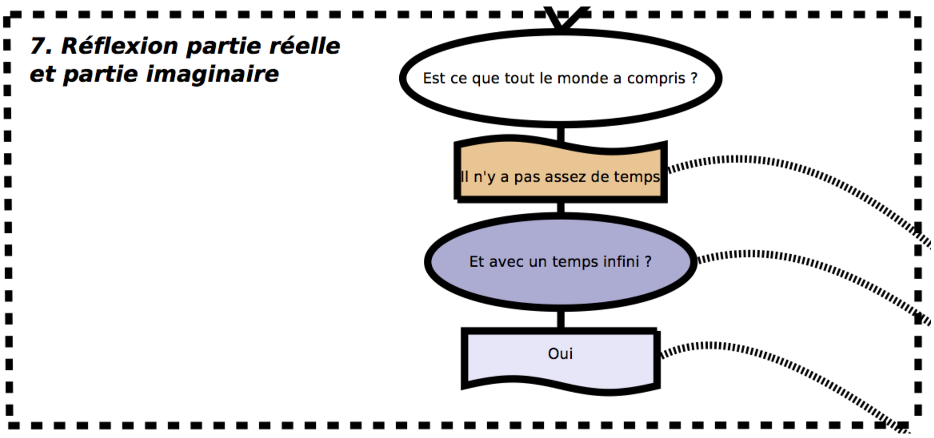


FIGURE 11.16 – CM3 - Épisode 7

Dans tous ces échanges, les élèves s'inscrivent dans le cadre du récit pour s'engager dans une démarche d'élaboration de preuve. Ils utilisent des récits pré-construits ou en construisent de nouveaux qu'ils exhibent en exemples et contre-exemples. Le récit est un moteur pour la construction d'explications. Pour chaque problématique soulevée par l'enseignant les élèves proposent une structure de récit permettant de répondre à la question ou de prouver qu'elle ne correspond pas à la structure de la situation.

Concernant la forme des récits proposés à l'oral, il est évident qu'on assiste à une simplification de leur forme par rapport à ceux proposés à l'écrit. Les personnages et les évènements disparaissent au profit d'éléments plus structurels. **Ce qui reste du récit dans ces échanges, c'est le mode de pensée. La possibilité de s'écarter de la réalité, tout conservant une structure permettant de l'analyser. D'une manière plus générale, c'est l'ensemble des fonctions du récit que les élèves mobilisent ici. Ils structurent, problématisent et expliquent au travers de la prise en charge de *possibles explicatifs*.**

Pour terminer ces analyses de productions, nous nous intéressons à la phase de résolution de problèmes plus classiques que nous avons proposée aux classes CM4, CM5 et CM6.

11.5 Complément à notre expérimentation

En complément de notre expérimentation, nous avons proposé aux classes CM4, CM5 et CM6 une phase de résolution de problèmes plus classique. Elle consistait en quatre problèmes de composition de tansformations (Vergnaud, 1981) dont nous reproduisons les énoncés ci-dessous :

Enoncé 1 : Laura joue deux manches aux toupies. A la seconde manche elle perd un point. Quand elle compte ses points après la deuxième manche, elle s'aperçoit qu'elle a gagné 2 points en tout. Que s'est-il passé à la première manche ?

Enoncé 2 : Laura joue aux toupies. Pendant le début de la partie elle gagne 5 points. En tout elle a gagné 3 points. Que s'est-il passé pendant la fin de la partie ?

Enoncé 3 : Laura a joué plusieurs manches. Marie est arrivée en cours de partie. Voici ce qu'elle a vu. Laura a d'abord gagné 4 points. Ensuite plusieurs manches se sont passées. Quand Marie s'en va, elle se rend compte que Laura a deux points de moins que lorsqu'elle est arrivée. Que s'est-il passé ?

Enoncé 4 : Laura joue aux toupies. Son amie l'observe pendant 7 manches. Pendant les trois première manches, elle a gagné 5 points. En tout elle a perdu 2 points. Que s'est-il passé pendant les 4 autres manches ?

Tous ces problèmes ont une structure identique. Selon la classification des problèmes additifs (Vergnaud, 1981), il s'agit de compositions de transformations. Leur structure est la suivante (Figure 11.17) :

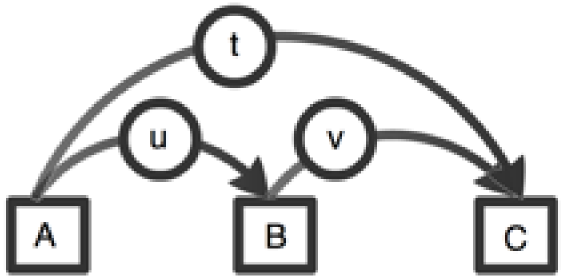


FIGURE 11.17 – Structure mathématique des problèmes de transformation

- t est une transformation composée de deux sous transformations u et v. On peut leur associer u, v et t entiers relatifs et u + v = t.
- A, B et C sont des états inconnus. On a A, B et C entiers relatifs et A + u = B, B + v = C, A + t = c.

Dans la donnée d'un problème de composition de transformations, la question peut concerner

la recherche de la transformation totale : Connaissant u et v, déterminer t.
la recherche de la seconde transformation : Connaissant u et t, déterminer v.
la recherche de la première transformation : Connaissant v et t, déterminer u.

La résolution de ce type de problèmes est difficile pour les élèves. Vergnaud soulignait un taux d'échec de 75% à l'entrée en sixième [15] sur un problème de recherche de la première transformation (1986, p. 37).

Dans nos problèmes, la transformation totale est toujours donnée par l'énoncé ainsi qu'une des sous-transformations. Les élèves doivent déterminer l'autre transformation. La situation que nous avons construite nous permet d'envisager plusieurs niveaux de problèmes de composition de transformations. Celui-ci dépend à la fois de la question posée et de la complexité, relativement à notre situation, des transformations en jeu. Dans la présentation de notre situation (p.163), nous avons associé au terme évènement, le déroulement d'une manche lors d'une partie. Cet évènement est directement lié à une transformation du score. Les transformations en jeu peuvent chacune être reliées à un évènement ou à plusieurs évènements.

Nous proposons dans les pages suivantes quelques éléments d'analyse pour donner une idée du travail réalisé.

15. Le problème proposé en illustration est le suivant : "*Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde partie, il a perdu 7 billes. Quand il compte ses billes à la fin, il s'apperçoit qu'il a gagné en tout 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?*"

11.5.1 Problème *élémentaire*

Nous avons débuté en proposant un problème de composition de transformation où chaque transformation est liée à un évènement :

Enoncé 1 : Laura joue deux manches aux toupies. A la seconde manche elle perd un point. Quand elle compte ses points après la deuxième manche, elle s'aperçoit qu'elle gagné 2 points en tout. Que s'est-il passé à la première manche ?

Ce problème met en jeu des sous-transformations réduites à un évènement. La première transformation (inconnue dans l'énoncé) et la seconde transformation correspondent respectivement à l'évènement "Laura a éjecté la toupie de son adversaire hors de l'arène" et "Laura a lancé sa toupie hors de l'arène". Nous qualifions ce problème d'*élémentaire* dans le sens où chaque transformation met en jeu un unique évènement.

11.5.1.1 Quelques résulutats sur les réponses des élèves

En posant la question "que s'est-il passé à la première manche" nous n'imposions pas un retour aux évènements [16]. Les natures des réponses proposées par les élèves ont donc été variées (Les extraits de copies proposés ci-dessous ont étés réalisés par des élèves des classes CM4 et CM5) :

– Description des points dans les deux manches

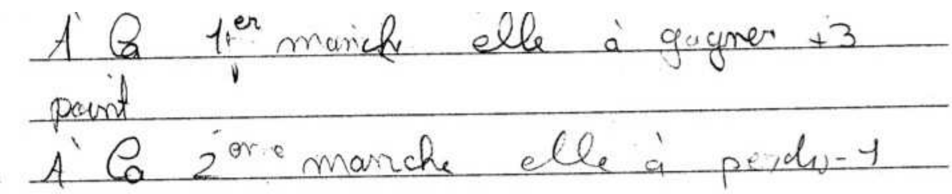


FIGURE 11.18 – Description des points

– Description des points et justification par calcul :

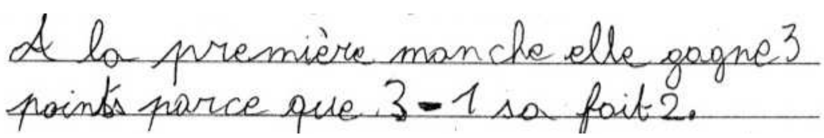


FIGURE 11.19 – Description des points et justification par le calcul

16. Nous aurions pu imposer aux élèves de "raconter" comme lors de la tâche 2.

– Description des évènements :

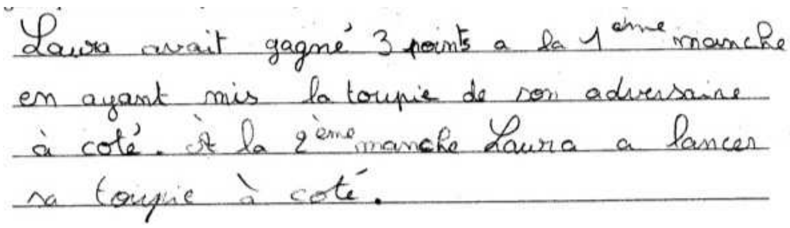

Laura avait gagné 3 points a la 1ème manche
en ayant mis la toupie de son adversaire
à coté. A la 2ème manche Laura a lancer
sa toupie à coté.

FIGURE 11.20 – Description des évènements

– Description des évènements et des points :

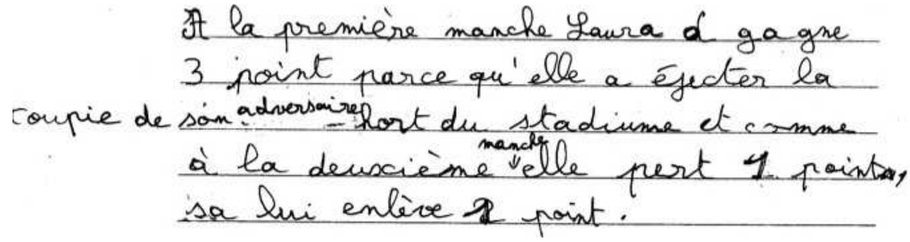

A la première manche Laura a gagne
3 point parce qu'elle a éjecter la
toupie de son adversaire hort du stadiume et comme
à la deuxième manche elle pert 1 points,
sa lui enlève 1 point.

FIGURE 11.21 – Description des évènements et des points

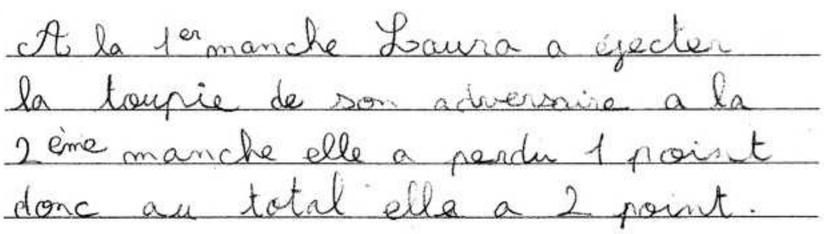

A la 1er manche Laura a éjecter
la toupie de son adversaire a la
2 ème manche elle a perdu 1 point
donc au total ella a 2 point.

FIGURE 11.22 – Description des évènements

Ce problème a été réussi par près de la moitié des élèves dans les classes CM4 et CM5 (où beaucoup d'élèves ont pourtant de grosses difficultés en mathématiques) et par près de 90% dans la classe de CM6. Ces résultats, qui n'ont pas vocation à être des indicateurs statistiques forts, montrent tout de même que la prise en charge du récit permet à certains élèves de résoudre ce problème via une considération des évènements. Cette résolution en termes d'évènements, peut parfois être complétée par une justificatication comme dans le dernier exemple.

Pour illustrer ces remarques, nous proposons d'analyser, par une lecture commentée, des échanges ayant eu lieu dans la classe CM6 lors de la correction (L'intégralité des échanges sont proposés en annexe I, p. 319). Lors de cette correction l'enseignant a affiché au tableau les réponses de plusieurs élèves pour organiser un débat (Figure ci-après).

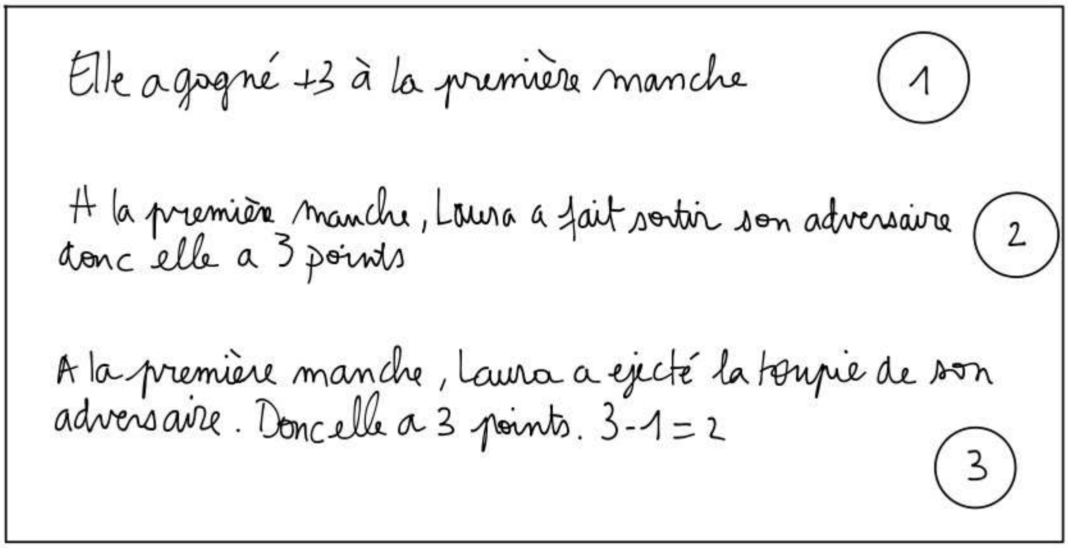


FIGURE 11.23 – Tableau - Réponses au problème 1

11.5.1.2 Extraits de correction orale : argumentation sur la modélisation

Après avoir lu l'énoncé et les réponses affichées au tableau, l'enseignant demande aux élèves ce qu'ils pensent des trois réponses. Les élèves considèrent que les trois réponses sont correctes. Elles repondent effectivement toutes à la question avec un résultat correct. Le débat qui a lieu porte sur la justification. Les élèves mettent en évidence les différences au niveau de l'explication :

- L'élève 1 n'a pas expliqué comment il a fait pour marquer trois points ;
- L'élève 2 explique comment il gagne les trois points ;
- L'élève 3 explique et marque le calcul.

Les élèves qualifient la première réponse de mathématique, la seconde de littéraire et la troisième, "plus détaillée", selon leurs mots, mèle les deux caractéristiques. Les élèves, conscients qu'il est possible de construire différents types de réponses, mettent en avant des arguments relatifs à une modélisation "*les trois réponses sont bonnes parce qu'on n'est pas obligé de dire l'action quand on a le nombre de points, on sait ce qu'il se passe*". Dans le cadre de notre expérimentation, la connaissance partagée par les élèves de la situation permet d'associer unilatéralement un score avec un évènement. Les trois propositions sont donc acceptables et complètes, ce qui ne serait pas le cas dans une autre situation. L'enseignant ajoute à ce sujet : "*il y a une notation plus mathématique et une notation plus littéraire, plus littéraire on comprend peut-être mieux, mais en mathématiques on va avoir tendance à demander une justification par le calcul (...) on n'est pas là pour dire que l'un est meilleur que l'autre mais y a une justification plus mathématique que je pense que tout le monde peut comprendre une fois que tout le monde connaît la situation et y a celle de Mathilde où, qui va pouvoir permettre à des gens qui sont moins au courant de la situation de pouvoir mieux suivre.*". Les scores sont alors une modélisation mathématique de la situation.

11.5.2 Problèmes *complexes*

À la suite de cet énoncé *élémentaire*, nous avons proposé plusieurs problèmes plus *complexes*. D'un point de vue mathématique, la résolution de ces problèmes impose le même travail. En connaissant la transformation complète et une sous-transformation, il faut déterminer la valeur de l'autre sous-transformation. En posant la question "que s'est-il passé ?" nous laissons aux élèves la possiblité de construire un possible explicatif au travers du récit sans pour autant le leur imposer. Nous leur avons signalé qu'ils étaient libres pour leur rédaction. Les élèves pouvaient donc calculer uniquement la valeur de la transformation (ce que certains ont fait).

Du point de vue du récit, ces quatre énoncés ont des caractéristiques particulières qui les différencient les uns des autres dans le cas où l'élève chercherait à determiner les événéments permettant de construire la transformation :

- La recherche porte toujours sur la seconde sous-transformation.
- Dans les énoncés 2 et 3, le nombre d'évènements (de manches) n'est pas imposé au élèves. Il est nécessaire d'en construire au moins deux mais il est également possible d'en construire plus.
- Dans le problème 2, la partie est décrite dans son intégralité. Les transformations prennent en charge la partie du début à la fin. Dans le problème 3, des manches se sont déroulées avant la première transformation ne sont pas décrites et d'autres se dérouleront aprèslla fin de la seconde transformation.
- Dans le problème 4, le nombre d'évènements est imposé aux élèves, il y en a 4 ("que s'est-il passé pendant les quatre autres manches ?").

Les transformations convoquées dans l'énoncé sont des compositions d'évènements. Par exemple dans l'énoncé 2, la transformation recherchée correspond à une variation de cinq points, transformation qui n'est pas accessible par un évènement élémentaire. Il faut donc, si on veut déterminer entièrement les transformations en jeu, envisager des compositions d'évènements.

11.5.2.1 Quelques réponses d'élèves

Ces problèmes ont été moins réussis par les élèves des classes CM4 et CM5. La complexité des transformations ne permettait pas aux élèves de se raccrocher directement aux évènements élémentaires.

Cependant, pour se "lancer" certains élèves ont mis en place une stratégie que nous pouvons qualifier de stratégie par essais-erreurs en considérant toujours que l'état initial (non explicité) était de 0 points (ce qui n'est pas le cas dans les problèmes 3 et 4) :

1. Repérer le "sens" de la transformation (perte ou gain de points) ;
2. Choix d'un évènement : par exemple éjecter la toupie hors du stadium dans le cadre d'un gain de points ;
3. Détermination de la transformation correspondante ;

4. Comparaison de cette transformation avec la transformation recherchée par calcul de scores ;
5. Ajustements via la prise en charge d'un second évènement.

Cette procédure d'essais-erreurs a permis a plusieurs élèves en difficultés d'entrer dans une activité de résolution avec, dans quelques cas, de la réussite. Nous n'avons malheureusement pas pu prendre trace de la mise en place de leur procédure (nous ne disposons que de leurs productions écrites finales).

Dans la classe CM6, le problème 2 a été plutôt réussi par l'ensemble de la classe (80% de bonnes réponses). Les élèves ont, comme dans le problème 1, pris en charge soit des évènements (Figure 11.24), soit des scores (Figure 11.25 et ont réussi à déterminer la valeur de la transformation comme dans les exemples ci-dessous :

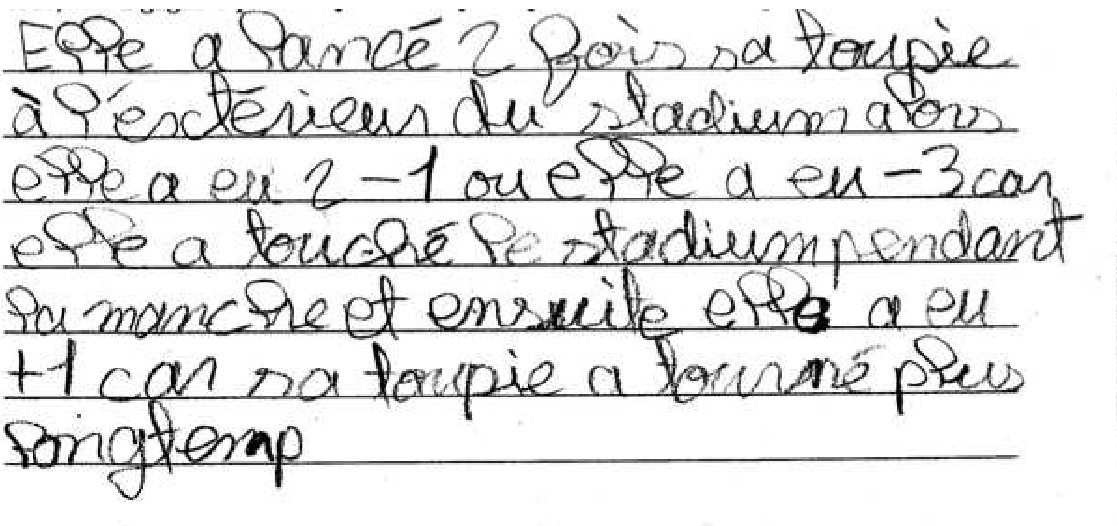

Elle a lancé 2 fois sa toupie
à l'esctérieur du stadium alors
elle a eu 2 -1 ou elle a eu -3 car
elle a touché le stadium pendant
la manche et ensuite elle a eu
+1 car sa toupie a tourné plus
longtemp

FIGURE 11.24 – Exemple 2

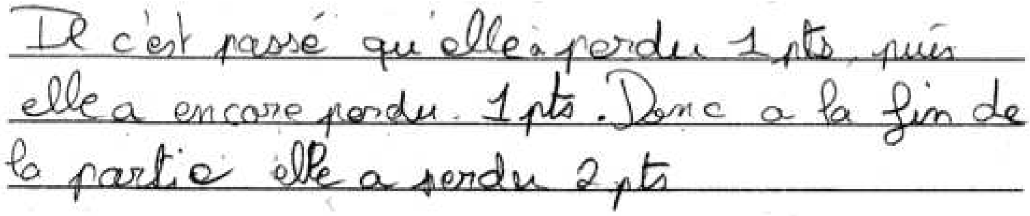

Il c'est passé qu'elle a perdu 1 pts, puis
elle a encore perdu 1 pts. Donc a la fin de
la partie elle a perdu 2 pts

FIGURE 11.25 – Exemple 3

Nous ne proposons pas ici, d'analyse plus complète des productions écrites d'élèves sur cette phase de résolution de problèmes [17]. Il nous semble cependant qu'il serait intéressant d'explorer la question du type de preuves produites. Nous pourrions pour cela nous appuyer notamment sur les travaux de Nicolas Balacheff (1988) sur les processus de preuves. Nous y revenons dans la conclusion de notre thèse.

11.5.2.2 Extraits de correction orale : contraintes portées par la situation et réflexion sur l'exhaustivité des réponses

Nous proposons quelques extraits commentés de la correction de ce second problème. Comme pour le premier problème, plusieurs exemples de productions d'élèves ont été affichés au tableau :

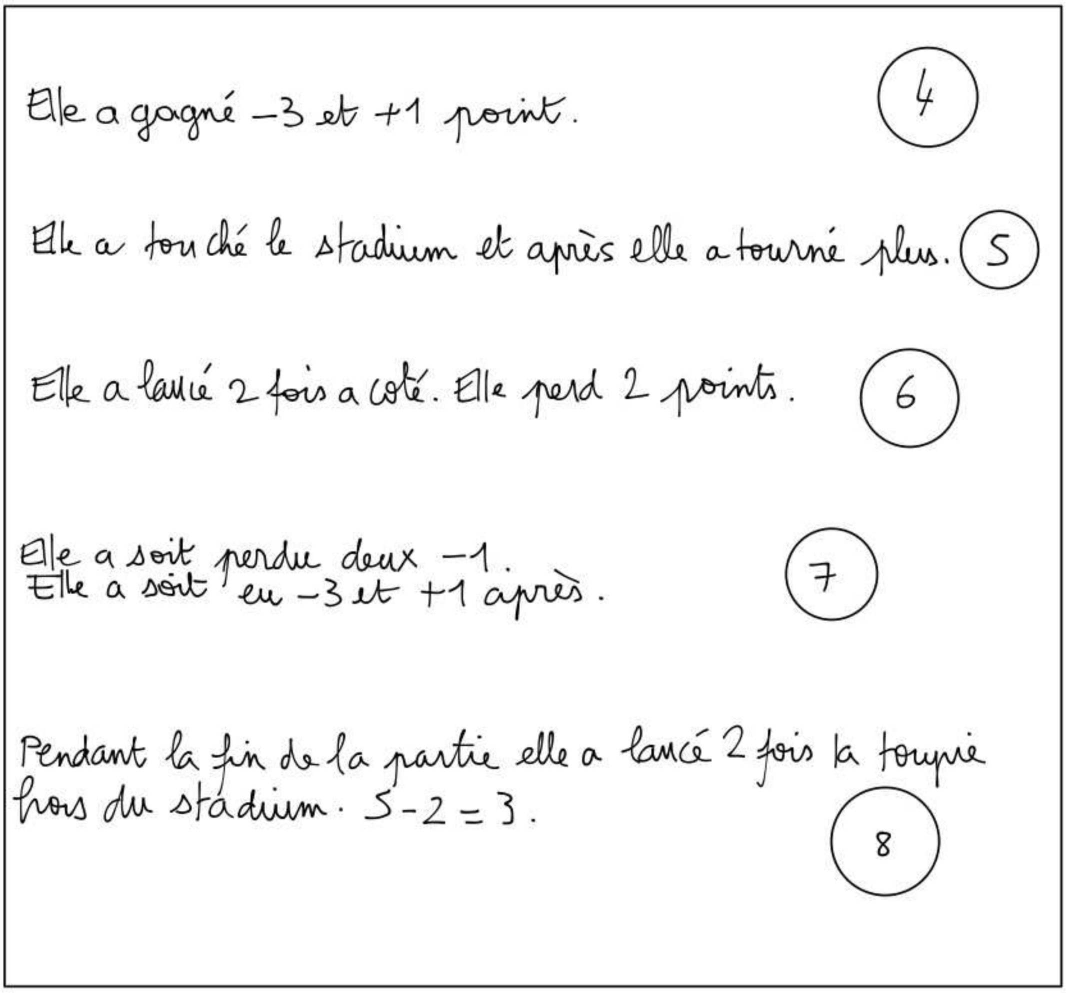


FIGURE 11.26 – Tableau - Réponses au problème 2

17. Les problèmes 3 et 4 n'ont pas été traités suffisament par écrit. Nous avons préféré orienter la fin de la séance vers une correction orale des deux premiers problèmes

Lors de cette correction, deux points intéressants ont été soulevés. Le premier sur le traitement de la complexité de la transformation qui nécessite la prise en charge de deux évènements du point de vue du récit :

> *Bah au début, je pensais que ça allait être en une manche, que ça allait être fait ... puisque en tout on disait qu'elle perdait trois points. Puisqu'elle en avait 5 au début. Et ensuite elle en avait trois, elle perd deux points donc. Et puisque y a pas dans la règle moins deux points, y a que moins un ou moins trois (...) donc ensuite moi j'ai dit qu'il fallait faire en deux.*

On voit dans cet extrait que l'élève prend en compte toutes les contraintes de la situation. Il a déterminé la valeur de la transformation et cherche à expliquer comment il est possible de la produire.

L'autre point intéressant de cette phase orale est la réflexion proposée sur la multiplicité des réponses. Les élèves, après avoir vérifié que toutes les réponses étaient valides (du point de vue des mathématiques et du point de vue de la situation), questionnent la nécessité de produire toutes les parties permettant d'obtenir la transformation. Dans le cas du second problème, le nombre de manches n'étant pas fixé, il est possible de produire une infinité de parties : une réponse suffisait.

Conclusion : Résultats et limites de notre expérimentation

Pour conclure cette partie expérimentale, nous revenons sur les résultats et les limites de notre expérimentation.

Nous avons proposé aux élèves différentes tâches de résolution de problèmes construites autour de l'établissement de deux conjectures mathématiques : d'une part, la détermination des scores que peut atteindre le vainqueur d'une partie ; d'autre part la détermination du nombre de manches nécessaire et maximum d'une partie. Lors de l'analyse *a posteriori*, nous avons pu mettre en évidence que les élèves ont effectivement convoqué le récit pour traiter ces deux conjectures.

– Dans cadre de la tâche 1, sans que la consigne le leur impose, les élèves ont pris en charge des possibles explicatifs au travers de la construction de récits. Ces résultats montrent que le récit constitue un support privilégié pour traiter l'incertitude et la projection dans ce qui est possible. De plus, notre analyse des productions écrites des élèves met en évidence le fait que les conjectures construites au travers d'un possible explicatif prennent mieux en charge la structure de la situation.

– Dans le cadre de la tâche 2 les élèves ont convoqué le récit parce que la consigne leur imposait. Nous avons mis en évidence que la construction de ces récits a permis aux élèves d'appréhender en profondeur la structure mathématique de la situation et de proposer des preuves mathématiques à propos des impossibles portés par la situation.

– Dans le cadre des phases orales, les élèves ont pris en charge des possibles explicatifs. Au travers de la construction de récits, ils ont pu produire des explications et entrer dans une démarche de preuve. Le récit en tant que mode de pensée est bien outil permettant de gérer l'incertitude et de s'engager dans la construction d'explications.

Le travail expérimental réalisé nous permet dans notre conclusion de revenir sur les modèles théoriques que nous avons construit dans la seconde partie de notre thèse. Nous y produisons des modèles effectifs témoignant de l'interaction entre l'activité de résolution de problèmes et la construction de récits.

Cependant, nous pouvons souligner quelques limites à ce travail expérimental :

Limites relatives au nombre d'expérimentations réalisées : Nous avons conduit cette expérimentation dans six classes de cycle III. Le corpus dont nous disposons est relativement concis mais nous permet une véritable étude exploratoire. Il ne prétend pas être un modèle représentatif mais il nous permet quand même de formuler des conclusions. Il sera intéressant, maintenant que nous disposons de premiers résultats de réitérer cette expérimentation.

Limites didactiques : Le type de séquence que nous avons proposé peut être limitant pour les élèves en difficulté avec la maîtrise de la langue. Même si tous ont réussi à produire de véritables récits, certains ont eu besoin de beaucoup de temps. Il serait donc nécessaire pour transférer notre expérimentation de former les élèves à cette pratique d'écriture. Il nous faudrait également proposer une formation pour les enseignants désirant mettre en œuvre ce type de situation.

Limites relatives au transfert de l'expérimentation : La situation proposée, inscrite dans le domaine numérique et appuyé sur un jeu, nous permet une bonne intégration du récit dans le milieu didactique. Le travail réalisé permet aux élèves d'accéder à la preuve mathématique dans ce demoaine numérique. Néanmoins, il serait donc intéressant de déterminer les conditions pour que cette expérimentation puisse être transférée à un autre domaine des mathématiques. La géométrie en particulier qui est le lieu privilégié de l'initiation à la preuve au collège.

Conclusion : Modélisation effective des interactions entre construction de récit et résolution de problèmes

En nous engageant dans ce travail de thèse, notre idée générale était que le récit pouvait permettre d'enclencher, de construire, de structurer et de valider un raisonnement mathématique. Au regard de cette première hypothèse, nous faisons dans cette conclusion, le bilan du travail réalisé et des perspectives qu'il permet d'ouvrir.

Dans la première partie de notre thèse (Partie I, p. 21–83), nous nous sommes intéressés à l'activité de résolution de problèmes telle qu'elle est actuellement mise en jeu dans le milieu scolaire à l'école primaire. En proposant une analyse des instructions officielles et des manuels scolaires, nous avons mis en évidence la difficulté à conduire un apprentissage qui ne véhicule pas une fausse image de l'activité et / ou qui ne prenne pas à sa charge les différents processus relatifs au raisonnement (Chapitres 1 et 2). Le travail d'aide à la représentation proposé par Julo (1995) nous a incités à envisager le récit comme un mode de pensée, permettant de proposer aux élèves un espace complémentaire – et naturel pour les élèves selon Bruner (Bruner, 2003) – pour construire leur raisonnement (Chapitre 3). Ce choix d'approche nous a permis de définir deux principes fondamentaux dans la construction de notre travail théorique et expérimental (Chapitre 4) :

- Permettre l'entrée dans une démarche d'écriture de récits lors d'une résolution de problèmes ;
- Inscrire le récit dans le milieu didactique de la situation.

Ce travail de contextualisation nous a amenés à envisager notre travail de thèse via deux objectifs :

- **D'un point de vue théorique, nous avons souhaité déterminer les conditions et les enjeux d'une rencontre entre construction de récit et résolution de problèmes.**

- **D'un point de vue méthodologique, nous avons cherché à déterminer les contraintes nécessaires à l'élaboration d'un milieu didactique permettant l'interaction entre construction de récit et résolution de problèmes.**

Dans cette conclusion, nous revenons sur les fonctions du récit en résolution de problèmes ainsi que sur nos modélisations de ces interactions.

Construction progressive de modélisations

Ainsi, dans la seconde partie de notre thèse (Partie II, p. 87-140), nous nous sommes attachés à caractériser le récit en tant que mode de pensée et à déterminer les conditions nécessaires à son inscription dans le milieu didactique. Nous avons pour cela construit une modélisation symétrique du *problème* et du *récit*.

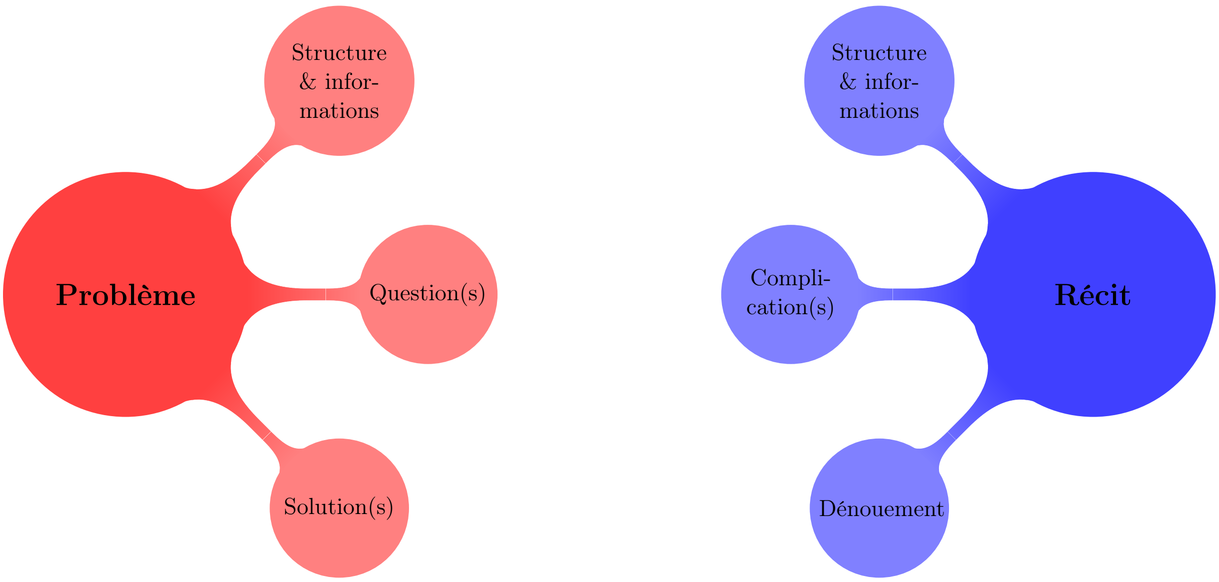


FIGURE 11.27 – Composantes principales des objets Problème et Récit

Ce travail de modélisation, est fondamental dans l'élaboration de notre thèse. Considérer le problème et le récit en tant que systèmes de composantes nous permet de prendre en charge, dans nos modélisations, les processus cognitifs des activités qui leur sont liées.

Dans le chapitre 5, nous avons modélisé l'activité de résolution en associant au traitement de chaque composante un type particulier de processus. La résolution d'un problème passe pour nous par le traitement simultané et complet des trois composantes :

- Le traitement de la composante **Structure & Informations** impose de déterminer les relations entre les objets présents dans la situation ainsi que leur valeur. Ce travail impose la mise en place de **processus structurants et modélisants** ;

- Le traitement de la composante **Question** impose de déterminer les manques, les inconnues et de construire des hypothèses pour envisager leur valeur. La mise en place de ces **processus d'élaboration et de problématisation** permet de mettre en place une ligne de conduite dans la construction du raisonnement ;

- Le traitement de la composante **Solution** impose de produire la valeur de la solution mais également de construire une explication. Cette explication sert à la fois à l'élaboration de la solution et à sa justification. Sa construction met en jeu des **processus explicatifs et argumentatifs**.

Nous avons fait attention dans l'élaboration de cette modélisation à envisager le traitement complet de chaque composante. Il est, selon nous, nécessaire pour que l'élève prenne à sa charge toute la complexité de l'activité de résolution de problèmes.

Nos modèles symétriques du *problème* et du *récit* (Chapitre 6) nous ont permis de souligner *a priori* les possibilités d'interaction entre la résolution de problèmes et la construction d'un récit. Nous avons associé les processus inhérents à la résolution d'un problème aux fonctions structurantes et heuristiques du récit (Chapitre 7). Nous avons caractérisé trois *fonctions du récit* (p. 125) :

1. **Fonction structurante :** La mise en récit permet en effet de prendre en charge des objets et facilite leur mise en relation. En permettant de construire un tout cohérent, le récit peut jouer un rôle structurant dans l'organisation des connaissances et dans l'articulation des phénomènes. Le récit facilite ainsi la compréhension de systèmes complexes.

2. **Fonction problématisante :** Il n'y a pas de récit sans intrigue et donc sans problématisation. La mise en place de l'intrigue, via un élément perturbateur, peut être comparée à la construction d'un problème. Elle invite par conséquent à reconsidérer les connaissances en jeu et à adopter une démarche de problématisation.

3. **Fonction explicative :** Le récit, à travers la fiction, permet de construire des explications. Celles-ci s'inscrivent dans des "mondes possibles" qui, de par leur nature, prennent en charge toutes les contraintes portées par le récit et par la situation de référence. Les explications produites respectent par conséquent ces mêmes contraintes.

La définition de ces trois fonctions nous permet de **considérer le récit comme un mode de pensée.** C'est un point fort de notre thèse qui nous permet d'envisager l'interaction entre construction d'un raisonnement dans l'optique de résolution d'un problème et l'activité de narration lors de la construction d'un récit.

Ainsi à la suite de ce travail, nous avons produit dans le chapitre 8, différents modèles d'interaction entre les deux activités (résolution de problèmes et construction de récit). En nous appuyant sur les travaux de Scardamalia et Bereiter (1987, 1998), nous avons considéré le couple *problème et activité de résolution* et le couple *récit et activité de construction de récit* comme deux espaces problèmes.

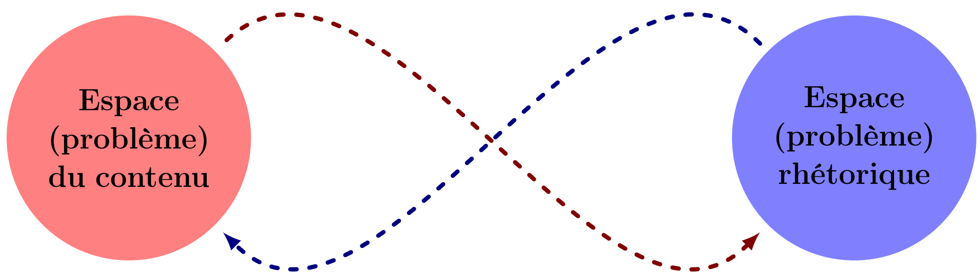


FIGURE 11.28 – Espaces problèmes dans la rédaction d'un texte

Nous avons envisagé l'interaction entre l'activité de résolution de problèmes et la construction de récit, comme la possibilité d'un transfert de procesus d'un espace problème à l'autre.

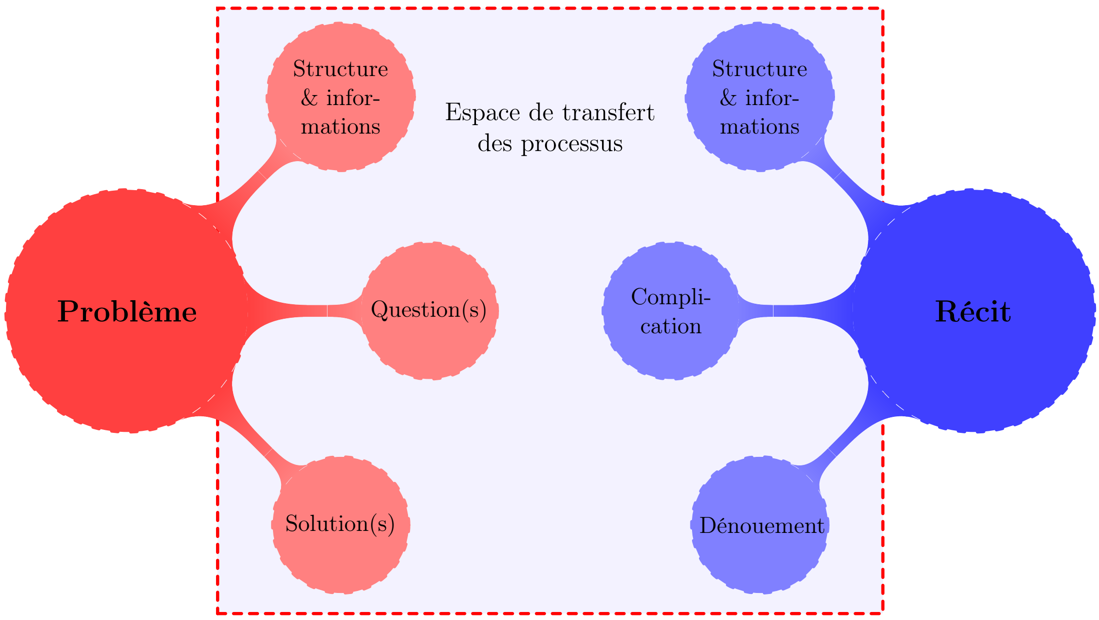


FIGURE 11.29 – Espace de transfert des processus

Pour justifier ces possiblités d'interaction nous avons également caractérisé *a priori*, le rôle du récit dans la structuration et la contraignance du milieu didactique :

– **Le récit enrichit le registre empirique grâce aux possibles, réels et fictionnels, qu'il permet d'exprimer. Le récit, de par son caractère structurant, contribue à la définition de la structure de la situation par l'élève en lui permettant de déterminer et d'exprimer les contraintes en jeu. Il participe, de fait, à la dévolution de la preuve.**

– **De plus, le récit participe à la circulation de l'élève entre les différents niveaux structurels du milieu didactique (milieu matériel, milieu objectif et milieu de référence) et permet de le faire entrer dans un processus de preuve.**

– **Enfin, en tant qu'objet de communication, il prolonge l'action du milieu en apportant la possibilité de mettre les explications produites à l'épreuve des pairs.**

Dans la troisième partie de notre thèse (Partie III, p. 143-234), nous avons mis à l'épreuve ces modèles théoriques d'interaction et l'apport des fonctions du récit en résolution de problèmes. Pour ce faire, nous avons commencé par construire, à partir d'un jeu, une situation qui permette à la fois une activité de résolution de problèmes et de construction de récits (Chapitre 9). En nous inscrivant dans la méthodologie de l'ingenierie didactique (Artigue, 1988) (Chapitres 10 et 11), nous avons élaboré et testé auprès de six classes de cycle III, une séquence expérimentale. Elle comprennait différentes activités de résolution de problèmes lors desquelles les élèves avaient la possibilité (ou l'obligation) de prendre en charge la construction d'un récit. **Le milieu didactique que nous avons élaboré grâce au récit a permis, comme nous le souhaitions, de proposer aux élèves un espace structurant et heuristique où il était possible de raisonner.**

Modèles effectifs de l'interaction entre résolution de problèmes et construction de récit

L'expérimentation que nous avons réalisée nous permet de produire trois nouveaux modèles présentant l'interaction entre nos deux espaces problèmes.

Impact effectif de la fonction structurante du récit : transfert des processus structurants

Dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes, des processus de structuration et de modélisation se mettent en place en autour de la composante *Structure & Informations*. Nous avons mis en évidence que ces processus de structuration pouvaient se réaliser dans l'espace problème rhétorique, relatif au récit. Dans le cadre de la tâche 1 : Les élèves devaient déterminer (en partie) la structure de la situation pour émettre des conjectures sur les scores possibles du vainqueur. Le traitement de cette question a été réalisé via une prise en charge de la structure du point de vue du récit. Les élèves ont produit des possibles explicatifs permettant de définir différentes valeurs possibles pour cette conjecture.

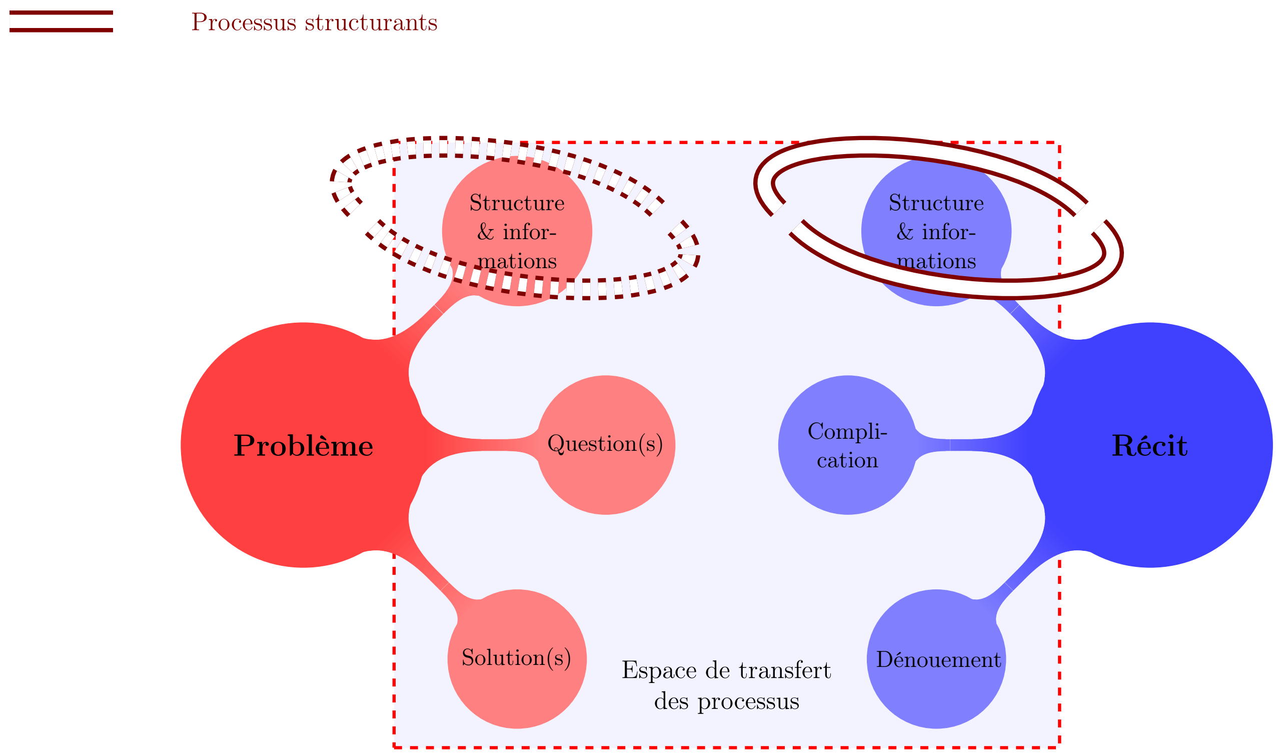


FIGURE 11.30 – Transfert des processus structurants

Les processus structurants relatifs à la composante *Structure & Informations* ont donc étés réalisés dans l'espace problème du récit (Figure 11.30). Les élèves se sont positionnés dans l'espace problème relatif au récit pour déterminer la structure mathématique de la situation. Leur élaboration de conjectures a été produite et justifiée au travers de la prise en charge de possibles explicatifs, c'est-à-dire de récits permettant d'expliquer une situation problématique.

Impact effectif de la fonction problématisante du récit en résolution de problèmes : transfert des processus de problématisation

Dans le cadre d'une activité de résolution de problème, les processus d'élaboration et de problématisation peuvent être transférés dans l'espace problème du récit. Lors de la tâche 2, les élèves avaient des problèmes de transformation à résoudre. Nous leur avons imposé de construire un récit pour répondre à la question. Ce transfert, que nous avons imposé, amène les élèves à structurer la situation du point de vue du récit et des évènements par la prise en charge de possibles explicatifs. En conséquence, il semble que leur connaissance de la situation, du point de vue des mathématiques soit également approfondie. Une partie importante des élèves a été en mesure de produire des preuves mathématiques pour justifier l'impossiblité de certaines situations (la partie à 10 points). Ces démonstrations n'avaient pas été produites lors de la tâche 1 et apparaissent lors du traitement de cette seconde tâche ainsi que dans les phases de débat.

.

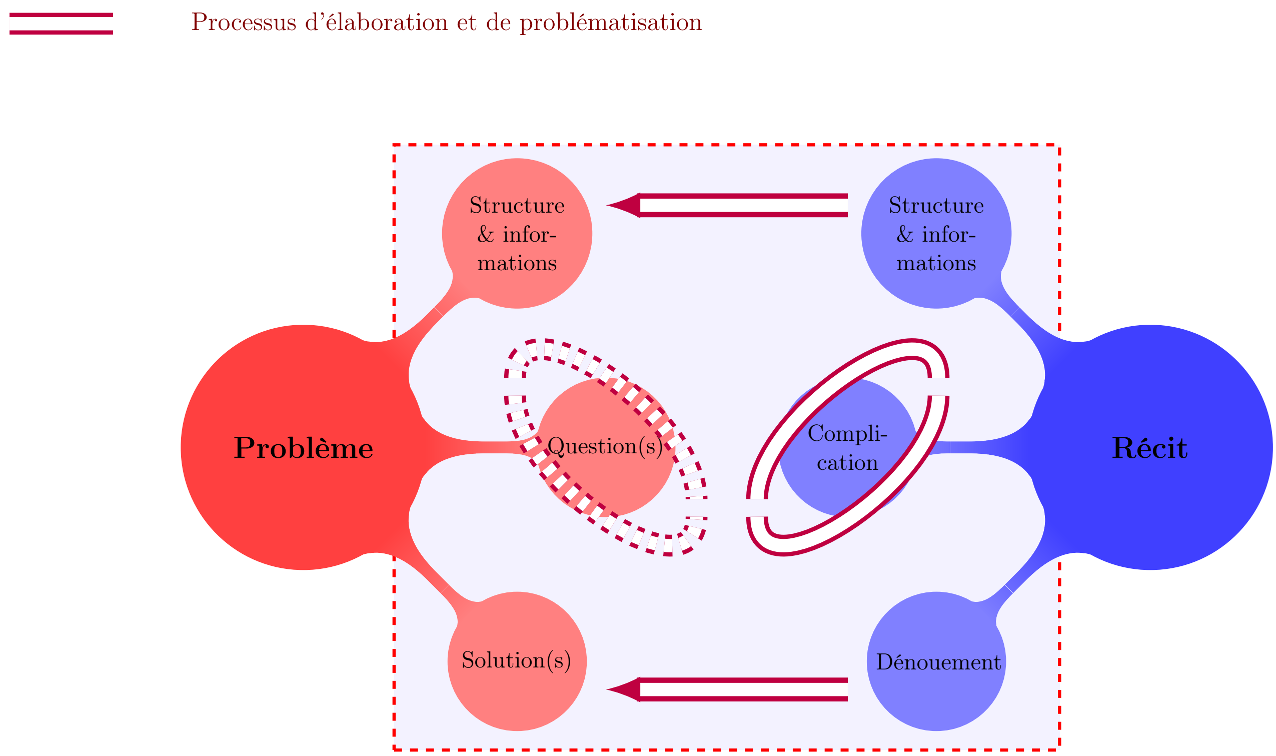


FIGURE 11.31 – Transfert des processus d'élaboration et de problématisation

Nous avons souligné dans notre partie théorique la force de l'intrigue dans la mise en place de processus de problématisation. Nous avons donc placé les élèves dans des situations où le problème mathématique qui leur était posé était formulé au travers de l'intrigue d'un récit. La prise en charge des processus de résolution s'est donc fait dans l'espace problème du récit. Ce transfert des processus d'élaboration et de problématisation, a permis aux élèves d'appréhender au travers du récit la structure la situation et la solution au problème (Figure 11.31). Par un jeu de construction et validation de possibles explicatifs ils ont approfondi leur connaissance de la structure mathématique de la situation. Ils ont ainsi été capables de produire de véritables démonstrations mathématiques pour valider ou invalider certaines situations.

Impact effectif de la fonction explicative du récit en résolution de problèmes : Transfert des processus explicatifs et argumentatifs

Dans le cadre d'une activité de résolution de problème, les processus permettant l'élaboration d'une conjecture et la construction d'une preuve peuvent s'appuyer sur la fonction explicative du récit. Lors des phases orales, les élèves devaient à nouveau construire des conjectures. Les contraintes associées à l'inscription du récit dans le milieu didactique ont permis aux élèves à la fois d'émettre ces conjectures (par construction de parties imaginaires) mais également de produire des justifications mathématiques attestant de leur validité. La construction du dénouement du point de vue du récit, amène les élèves à proposer une valeur pour la composante *Solution* et les engage dans la construction d'une preuve mathématique. Les processus d'explication et d'argumentation sont ainsi en partie produits dans l'espace problème du récit (Figure 11.32).

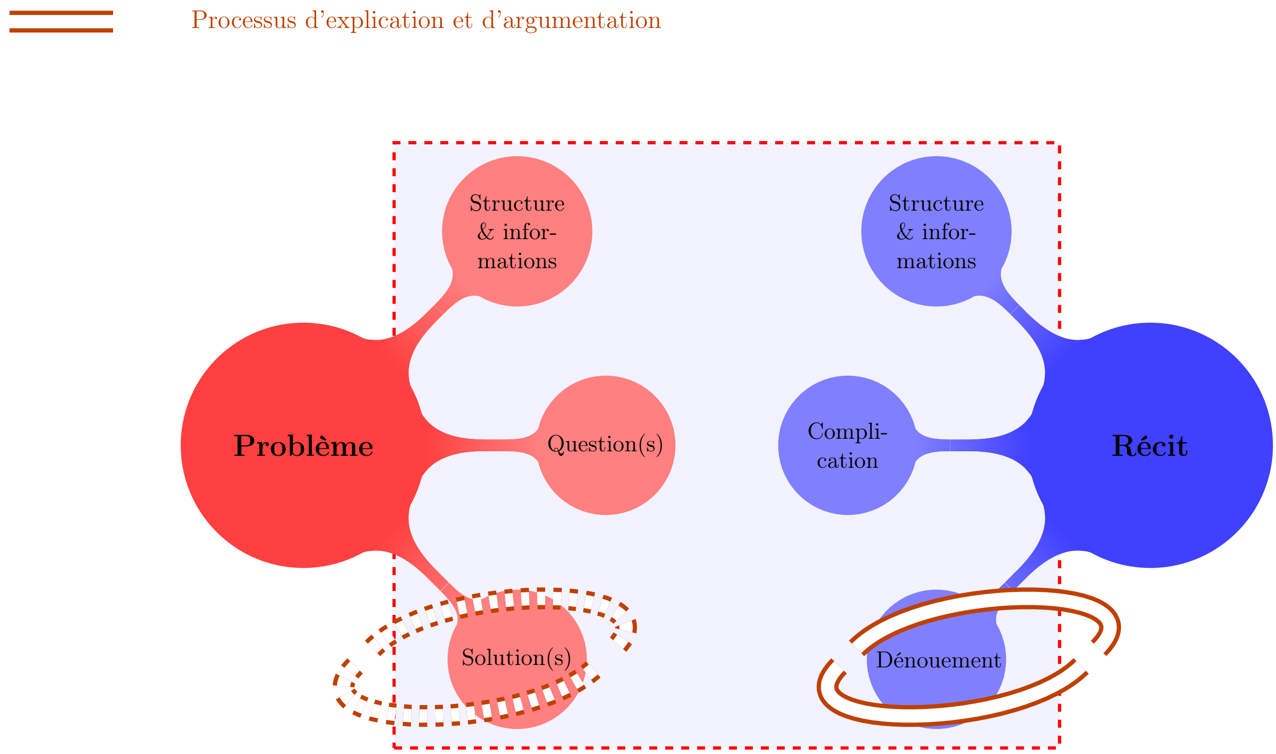


FIGURE 11.32 – Transfert des processus d'explication et d'argumentation

Le récit permet d'envisager des possibles explicatifs. Il constitue en cela un outil puissant pour construire des explications et prendre en charge leur validité. Par conséquent, dans le cadre d'une situation de résolution de problèmes, la fonction explicative du récit permet de faire entrer l'élève dans des processus de construction de preuves. Dans notre expérimentation, les élèves l'ont utilisé (durant les phases orales mais aussi dans les phases écrites) comme un support permettant à la fois d'envisager une explication mais aussi de la justifier.

Ces trois transferts se réalisent grâce à l'inscription du récit dans le milieu didactique. Nous l'avons mis en évidence à plusieurs reprises lors de l'analyse *a priori de notre expérimentation*, les choix que nous avons faits permettent de donner au récit un rôle à la fois structurant et contraignant [18]

Perspectives de recherche

Le travail que nous avons réalisé nous permet d'envisager différentes pistes de recherche. Nous les présentons ci-dessous en débutant par une piste pour l'enseignement.

Transférabilité et aménagement de l'expérimentation

Nous l'avons évoqué dans la conclusion de la partie III, la question de la transférabilité de l'expérimentation est à explorer. Nous pourrions envisager, dans la cadre du récit (et donc du problème) la construction de successions plus complexes d'évènements ou avec une prise en charge à rebours qui permettrait d'examiner les conditions de possiblité des évènements ou une introduction d'évènements simultanés qui amènerait des questions sur la temporalité et sur les relations entre les évènements. Du point de vue des mathématiques, il également intéressant d'ouvrir l'approche proposée à d'autres domaines des mathématiques comme la géométrie. Dans ce cas, la fonction structurante du récit pourrait particulièrement être mise à l'épreuve pour organiser non seulement le temps (comme dans notre expérimentation) mais également l'espace. De même les fonctions problématisantes, explicatives et argumentatives pourraient être sollicitées dans la construction du raisonnement.

En construisant notre situation autour d'un jeu, nous avons réuni les conditions nécessaires à l'inscription du récit dans le milieu didactique. L'aspect empirique du jeu disparaît, de par les consignes que nous avons proposées, laissant place au traitement de la structure mathématique de la situation. Le jeu est assimilé par le recit ce qui nous permet de transférer la question de la validation du domaine empirique aux mathématiques.

18. Au sens proposé dans le chapitre 7 lors de l'élaboration de nos modèles théoriques d'interaction, au travers de travaux de Claire Margolinas et Magalie Hersant.

Néanmoins, il faudra dans la suite construire des situations permettant le transfert des processus relatif au traitement d'un problème sans convoquer une situation de jeu. En géométrie par exemple, une situation empirique pourrait être la construction d'une figure. Le récit devrai alors prendre en charge le programme de construction de cette figure.

Prise en charge du concept de contrat didacitique

Dans notre travail, nous avons exploré le concept de *milieu didactique* sans parler de *contrat*, ni de la place de l'enseignant. Le récit nous a permis de construire un milieu didactique non seulement antagoniste de l'élève, mais qui amène la structure et la contraignance nécessaire au milieu à la dévolution de la preuve. Le contrat didactique pose la question des "responsabilités". Au-delà de la discussion sur le milieu, il serait donc intéressant d'étudier les interactions élèves-enseignants dans ce type de situation. En inscrivant le récit dans une situation, la validité de la justification peut être laissée à l'élève qui la contrôle grâce à la cohérence du récit. Nous pourrons analyser la manière dont les élèves assument cette responsabilité via l'écriture de du récit.

Cette approche par les interactions élèves-enseignant et élèves-élèves nous permettra de poursuivre notre étude sur le rôle du récit. Il s'agira de produire des critères permettant la sélection d'écrits pour permettre la confrontation dans le cadre de phases orales. Puis lors de ces phases de mettre en jeu le rôle du récit, via la fonction de justification, dans l'étayage. Nous avons évoqué dans notre partie expérimentale la question de la validation des justifications via l'analyse d'une activité de résolution de problèmes plus classique. Nous pourrions ainsi, au travers des questions de contrat et d'interactions, développer la fonction de justification du récit. En s'appuyant sur la cohérence du récit construit, c'est la validité des possibles explicatifs qui est mise en jeu.

Étude des processus de preuve dans le cadre du récit

Pour poursuivre cette question de la validation des justifications, nous aimerions analyser plus en profondeur, la nature des preuves produites par les élèves dans le cadre du récit. Lors des séances orales par exemple, la simultanéité de la construction d'un possible explicatif et de sa justification, nous a empêchés de déterminer précisément la nature des preuves en jeu. Nous pourrions explorer cette question en nous appuyant notamment sur les travaux de Balacheff (1988) et sa caractérisation des différents types de preuves. Chaque récit ou micro-récit pourra alors être associé, selon des critères à déterminer, à un type de preuve particulier.

Notre travail met en évidence que les énoncés de problèmes scolaires gagneraient à mieux utiliser toutes les dimensions et fonctions du récit. Ils pourraient ainsi devenir des textes *résistants* (réticents ou proliférents) au sens de Tauveron (1999, 2003) du point de vue des mathématiques. En envisageant de faire produire ce type de récits à des élèves, nous proposerions un travail de repérage mais surtout de résolution de l'élément problématique. Les élèves seraient ainsi mieux à même de traiter les complications et de construire leur résolution du problème en jeu. Ils seraient ainisi mieux préparés à la gestion de la complexité qui est au cœur des démarches d'investigations prônées au collège.

Références

Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert.* Lyon : SCEREN-CRDP Académie de Lyon.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. In *Recherche en didactique des mathématiques* (Vol. 3, pp. 281–308). Grenoble : La pensée Sauvage Editions.

Astolfi, J.-P., Darot, , Ginsburger-Vogel, Y., & Toussaint, J. (2008). *Mots-clés de la didactique des sciences : repères, définitions, bibliographies* (2e éd. éd.). De Boeck.

Astolfi, J.-P., & Ducancel, G. (1995). Apprentissages langagiers, apprentissages scientifiques : Problématiques didactiques : regards en arrière et aspects actuels. *Repères - Institut national de recherche pédagogique*(12), 5–20.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège.* Thèse de doctorat non publiée, Grenoble 1.

Balmes, R.-M., & Coppé, S. (1999). Les activités d'aide à la résolution de problèmes dans les manuels de cycle iii. *Revue Grand N*(63), 1998–99.

Bremond, C. (1966). La logique des possibles narratifs. *Communications*, *8*(1), 60–76.

Brissiaud, R. (1984). La lecture des énoncés de problemes. *INRP, Rencontres Pédagogiques. Nro*, *4*.

Brougère, G. (1995). *Jeu et éducation.* France : L'Harmattan.

Brougère, G. (2005). *Jouer/apprendre.* Paris : Economica ; Anthropos.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques Volume 9*(3), 309–336.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990* (2e éd. éd.). La Pensée sauvage.

Brousseau, G. (2004). Tâche, situation, activité. *Texte en exclusivité pour la SSRDM*, *11*(09), 04.

Bruguière, C., & Héraud, J.-L. (2007). Mondes possibles et compréhension du réel. In *Aster n44 - scienes et récits* (pp. 69–106). France.

Bruguière, C., & Triquet, E. (2012). Des albums de fiction réaliste pour problématiser le monde vivant. In *Repères, n 45/2012 oeuvres, textes, documents : lire pour apprendre et comprendre à l'école et au collège.* France : ENS Editions : Elisabeth Nonnon, François Quet.

Brun, J. (1990). La resolution de problemes arithmetiques : bilan et perspectives. In *Maths-ecoles* (pp. 2–15). Neuchatel : IRDP.

Bruner, J. S. (2003). *Making stories : Law, literature, life.* Harvard University Press.

Bruner, J. S. (2005). *Pourquoi nous racontons-nous des histoires ? : Le récit, au fondement de la culture et de l'identité* (Nouv. éd.). Retz.

Bruner, J. S. (2006). *In search of pedagogy : the selected works of jerome s. bruner.* London : New York.

Bruner, J. S. (2008). *L'éducation, entrée dans la culture : les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle* (Nouv. éd.). Retz.

Bulletin officiel hors-série n^{o} 3 du 19 juin. (2008). *Programmes du collège.*

Bulletin officiel spécial n^{o} 6 du 28 août. (2008). *Programmes pour l'école primaire.*

Camenisch, A., & Petit, S. (2006). Lire et écrire des énoncés de problèmes additifs : Le travail sur la langue. Strasbourg : IREM de Strasbourg.

Castela, C. (2008a). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. *Perspectives en didactique des mathématiques Cours de la XIIIème École d'été de didactique de mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.*

Castela, C. (2008b). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. , *28*(2), 135–182.

Castellani, G. (1995). *Bien lire dans tous les disciplines au collège.* Albin Michel.

Chalmers, A. F. (1987). Qu'est-ce que la science ? popper, kuhn, lakatos, feyerabend. *Le Livre de Poche, coll.«Biblio essais.*

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221–265.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. structures et fonctions. *Dorier J.-L. et al*, 3–22.

Chirouter, E. (2010, septembre). À quoi pense la littérature de jeunesse ? *Sciences humaines*, *N 218*(8), 18–18. Disponible sur `http://www.cairn.info/article.php?ID`$_ARTICLE = SH_218_0018$

Council of Europe. (2001). *Un cadre européen commun de référence pour les langues : apprendre, enseigner, évaluer.* Paris ; Strasbourg : Didier ; Conseil de l'Europe.

Crahay, M., Fagnant, A., Demonty, I., & Lejong, M. (2003). La résolution de problèmes : Un processus complexe de modélisation mathématique. *Bulletin d'information pédagogiques*(54), 29–39.

Descaves, A. (1992). *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes.* France : Hachette.

Documents d'accompagnement des programmes, Charnay, R., Dossat, L., Fomentin, J., Houdement, C., Matulik, N., Rgot, G., et al. (2002). *Mathematiques cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2).* CNDP.

Documents d'accompagnement des programmes cycle 2, Dupaire, J.-L., & Mégard, M. (2008). *Le nombre au cycle 2.* France : SCREN (CNDP-CRDP).

Documents d'accompagnement des programmes cycle 3, Dupaire, J.-L., & Mégard, M. (2008). *Le nombre au cycle 3.* France : SCREN (CNDP-CRDP).

Dumas-Carré, A., Goffard, M., & Gill, D. (1992). Difficultés des élèves liées aux différentes activités cognitives de résolution de problèmes. *Aster*(14), 53–74.

Durand-Guerrier, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.* Thèse de doctorat non publiée, Université Claude Bernard-Lyon I.

Durand-Guerrier, V., & Diaz, T. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. (60), 61–78.

Eco, U. (1985). *Lector in fabula.* Hachette. com.

Eco, U. (1996). *Six promenades dans les bois du roman et d'ailleurs* (M. Bouzaher, Trad.). Grasset.

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *Aster, 1997, 24" Obstacles : travail didactique".*

Fayol, M. (1985). *Le recit et sa construction : une approche de la psychologie cognitive.* Neuchatel : Delachaux & Niestle.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre : Du comptage à la résolution de problèmes.* Delachaux et Niestlé Paris.

Genette, G. (1972). *Figures III.* [Paris] : Editions du Seuil.

Glaudes, P., & Reuter, Y. (1996). *Personnage et didactique du récit.* Université de Metz.

Goullier, F. (2006). *Les outils du conseil de l'Europe en classe de langue : Cadre européen commun et portfolios.* Editions Didier.

Guerrien, B. (1993). *La théorie des jeux.* Economica.

Hersant, M. (2010a). *Empirisme et rationalite au cycle 3 : vers la preuve en mathematiques.* Mémoire complémentaire HDR, Université de Nantes, Nantes.

Hersant, M. (2010b). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathematiques : de l'analyse de sequences ordinaires au developpement de situations pour les classes ordinaires.* Note de synthèse HDR, Université de Nantes, Nantes.

Hintikka, J. (1989). *L'intentionnalité et les mondes possibles.* Villeneuve d'Ascq (France, Nord) : Presses Universitaires de Lille.

Houdement, C. (1999). Le choix des problèmes pour la "résolution de problèmes". (63), 59–76.

Jacobi, D. (1987). *La communication scientifique : Discours, figures, modèles.* Peter Lang Verlag.

Jouve, V. (1992). *L'effet-personnage dans le roman.* Presses universitaires de France.

Jouve, V. (2007). *Poétique du roman.* Paris : Armand Colin.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Rennes : Presses universitaire de France.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes. *Grand N*, *69*, 31–52.

Kahane, J.-P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques.* Paris : Odile Jacob.

Lahanier-Reuter, D. (2007). Récits dans la classe de mathématiques. , *133/134*, 101–123.

Larivaille, P. (1974). L'analyse (morpho)logique du récit. In *Poétique du roman* (pp. 368–388). France.

Laudan, L. (1977). *La dynamique de la science.* Pierre Mardaga.

Lhoste, Y., Boiron, V., Jaubert, M., Orange, C., & Rebière, M. (2011). Le récit : un outil pour prendre en compte le temps et l'espace et construire des savoirs en sciences ? *RDST*(4), 52–82.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, 3–16.

Moulin, M. (2010). Mathématiques et récits : des textes de fiction pour'bien lire'des énoncés de problèmes de mathématiques en classe de CM2. *Grand N*(86).

Moulin, M., Deloustal-Jorrand, V., & Triquet, E. (2013). Reading stories to work on problem solving skills. In *CERME 2013.* Antalya (Turquie).

Neyret, R. (1991). Lecture d'énoncés et progression thématique. *Grand N*(50), 89–101.

Nguala, J.-B. (2005). La multireprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. (76), 45–63.

Orange, D., & Guerlais, M. (2005). Construction de savoirs et rôle des enseignants dans une situation de «débat scientifique» à l'école élémentaire : comparaison de deux cas. In *Colloque international.'former des enseignants professionnels, savoirs et compétences, nantes, février.*

Orange-Ravachol, D. (2012). *Didactique des sciences de la vie et de la terre : entre phénomènes et événements.* Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Orange-Ravachol, D., & Triquet, E. (2007). *Sciences et récits.* Paris : CRDP.

Pelay, N. (2010). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique.* Thèse de doctorat non publiée, Université Claude Bernard.

Peroz, P. (2000). Des problèmes dans les énoncés. *Grand N*(66), 55–70.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.

Pólya, G. (1994). *Comment poser et résoudre un problème.* Sceaux : Gabay.

Reuter, Y. (2009). *L'analyse du récit* ([2e édition] éd.). A. Colin.

Ricœur, P. (1983). *Temps et récit t.1.* Paris : Seuil.

Ricœur, P. (1984). *Temps et récit t.2, [La configuration dans le récit de fiction].* Paris : Seuil.

Ricœur, P. (1985). *Temps et récit t.3, le [temps raconté].* Paris : Seuil.

Ricœur, P. (1986). *Du texte à l'action.* Paris : Esprit/seuil.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1987). Knowledge telling and knowledge transforming in written composition. In R. Rosenberg (Ed.), *Reading, writing, and language learning* (pp. 142–175). Cambridge : Cambridge University Press.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1998). L'expertise en lecture-rédaction. In *La rédaction de textes : Approche cognitive* (pp. 13–59). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Tarski, A. (1960). *Introduction à la logique : ["Introduction to logic and to the methodology of deductive science"], par alfred tarski,... 2e édition revue et augmentée. traduit de l'anglais par [le p.] jacques tremblay, S.J..* Paris : Gauthier-Villars.

Tauveron, C. (1999). Comprendre et interpréter le littéraire à l'école : du texte réticent au texte proliférant. *Repères-Institut national de recherche pédagogique*(19), 9–38.

Tauveron, C. (2003). *Lire la littérature à l'école : Pourquoi et comment conduire cet aprentissage spécifique ? de la GS au CM.* Hatier.

Triquet, E. (2007). Elaboration d'un récit de fiction et questionnement scientifique au musée. In *Aster n44 - scienes et récits* (pp. 107–134). France.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, les mathématiques et la réalité.* France : Peter Lang Verlag.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple les structures additives. (38), 21–40.

Verschaffel, L., Greer, B., & Corte, E. D. (2000). *Making sense of world problems.* Swets & Zeitlinger Publishers.

Veyne, P. (1971). *Comment on écrit l'histoire : essai d'épistémologie.* Éditions du Seuil.

Annexes

Chapitre A

Extraits de programmes et de manuels scolaires

3. Organisation des contenus

Les quatre parties des programmes des classes du collège s'organisent autour des objectifs suivants :

• organisation et gestion de données, fonctions

- maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ;
- approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ;
- s'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques et à l'utilisation d'un tableur ;
- acquérir quelques notions fondamentales de statistique descriptive et se familiariser avec les notions de chance et de probabilité.

• nombres et calcul

- acquérir différentes manières d'écrire des nombres (écriture décimale, écriture fractionnaire, radicaux) et les traitements correspondants ;
- se représenter la droite graduée complète, avec son zéro séparant les valeurs positives et négatives et apprendre à y localiser les nombres rencontrés ;
- poursuivre l'apprentissage du calcul sous toutes ses formes : mental, posé, instrumenté ;
- assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation).

• géométrie

- passer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure) ;
- isoler dans une configuration les éléments à prendre en compte pour répondre à une question ;
- être familiarisé avec des représentations de l'espace, notamment avec l'utilisation de conventions usuelles pour les traitements permis par ces représentations ;
- découvrir quelques transformations géométriques simples : symétries : symétries axiales et centrales ;
- se constituer un premier répertoire de théorèmes et apprendre à les utiliser.

• Grandeurs et mesure

- se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ;
- connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés ;
- calculer avec les unités relatives aux grandeurs étudiées, ainsi qu'avec les unités de quelques grandeurs quotients et grandeurs produits.

Ces programmes sont construits de manière à permettre une acquisition et un approfondissement progressifs des notions sur toute la durée du collège. Leur mise en oeuvre est enrichie par l'emploi des instruments actuels de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs).

FIGURE A.1 – Liste des objectifs d'apprentissage au collège
(Bulletin officiel hors-série n° 3 du 19 juin 2008 , p. 10)

Note : Le tableau ci-dessus est extrait des programmes du collège. Il rescense l'ensemble des objectifs en mathématiques. Nous pouvons constater que l'apprentissage de la résolution de problèmes n'en fait pas partie.

N° 102.809 **Mathematik** Aduis.com

Aufteilen

Textaufgaben:

1. 50 Äpfel werden zu je 10 Äpfeln in Säckchen gepackt.
Wie viele Säckchen braucht man?

R: ______________________________

A: ______________________________

2. In einem Teich schwimmen 35 Fische. Ein Fischer fängt mit seinem Netz immer 5 Fische. Wie oft muss er das Netz eintauchen, wenn er alle Fische fangen will?

R: ______________________________

A: ______________________________

3. 16 Schnecken setzen sich auf Blätter. Es haben immer 2 Schnecken auf einem Blatt Platz. Wie viele Blätter brauchen sie?

R: ______________________________

A: ______________________________

4. Max soll 22 Handschuhe in den Kasten räumen. Er legt sie immer zu zweit hinein. Wie oft muss Max das machen, damit am Ende alle aufgeräumt sind?

R: ______________________________

A: ______________________________

5. Der Bäcker bäckt in einer Stunde 8 Semmeln. Wie viele Stunden muss der Bäcker backen, wenn er 24 Semmeln braucht?

R: ______________________________

A: ______________________________

Die Lösung und 1000e weitere Arbeitsblätter zum gratis Download: www.aduis.com. Schauen Sie rein.

FIGURE A.2 – Problèmes en allemand

Chapitre B

Extrait Ouvrage Polya *Comment poser et résoudre un problème*

Pour résoudre un problème vous devez successivement :

I — Comprendre le problème

II — Concevoir un plan

Trouver le rapport entre les données et l'inconnue.

Vous pouvez être obligé de considérer des problèmes auxiliaires si vous ne pouvez trouver un rapport immédiat.

Vous devez obtenir finalement un plan de la solution.

III — Mettre le plan à exécution

IV — Examiner la solution obtenue

COMPRENDRE LE PROBLÈME

- *Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelle est la condition ?*
- Est-il possible de satisfaire à la condition ? La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue ? Est-elle insuffisante ? Redondante ? Contradictoire ?
- Dessinez une figure. Introduisez la notation appropriée.
- Distinguez les diverses parties de la condition. Pouvez-vous les formuler ?

CONCEVOIR UN PLAN

- L'avez-vous déjà rencontré ? Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?
- *Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?* Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?
- *Regardez bien l'inconnue* et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.
- *Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ?* Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? Vous faudrait-il introduire un élément auxiliaire quelconque pour pouvoir vous en servir ?
- Pourriez-vous énoncer le problème différemment ? Pourriez-vous l'énoncer sous une autre forme encore ? Reportez-vous aux définitions.
- Si vous ne pouvez résoudre le problème qui vous est proposé, essayez de résoudre d'abord un problème qui s'y rattache. Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? Pourriez-vous résoudre une partie du problème ? Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ? Pourriez-vous tirer des données un élément utile ? Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ? Pourriez-vous changer l'inconnue, ou les données, ou toutes deux s'il est nécessaire, de façon que la nouvelle inconnue et les nouvelles données soient plus rapprochées les unes des autres ?
- Vous êtes-vous servi de toutes les données ? Vous êtes-vous servi de la condition tout entière ? Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

METTRE LE PLAN A EXÉCUTION

- En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre. Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ? Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

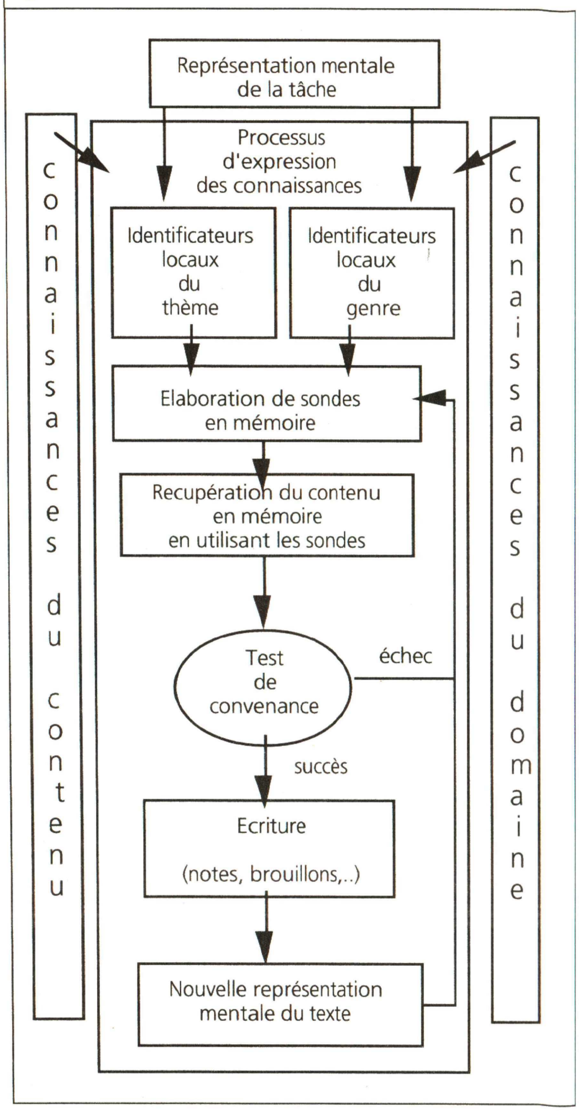
REVENIR SUR LA SOLUTION

- Pouvez-vous vérifier le résultat ? Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?
- Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ? Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?
- Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

Chapitre C

Processus d'expression et de transformation des connaissances - Scardamalia et Beriter (1998)

Figure 2

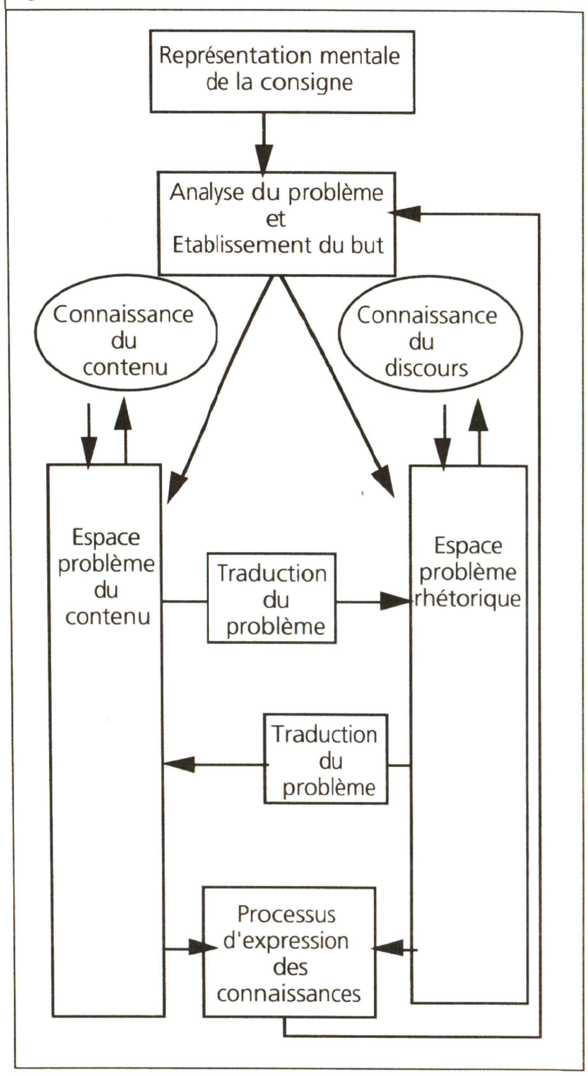


Processus d'expression des connaissances.
(d'après Scardamalia & Bereiter, 1987).

Figure C.1 – Modèle d'expression des connaissances

32 LA RÉDACTION DE TEXTES

Figure 3



Structure du modèle de transformation des connaissances.

FIGURE C.2 – Modèle de transformation des connaissances

Chapitre D

Axiomatique locale - Démonstrations mathématiques

> **Théorème 1 (TH1) :** Il faut jouer un minimum de trois manches pour terminer une partie.

Considérons, $(\mathbb{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des ensembles contenant les valeurs possibles des scores des joueurs. Elle se construit par récurrence sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{S}_{n+1} = \mathbb{S}_n \oplus \mathbb{P} \text{ et } \mathbb{S}_0 = \{0\}.$$

$$\text{ou } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{S}_n = \bigoplus_{p=1}^{n} \mathbb{P}$$

Comme nous l'avons précédement indiqué,

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_0 &= \{\ 0\ \} \\
\mathbb{S}_1 &= \mathbb{P} = \{\ -3\ ; -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ \}
\end{aligned}$$

En appliquant la formule de récurrence, nous pouvons déduire les ensembles $\mathbb{S}_n$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_2 &= \mathbb{P} \oplus \mathbb{P} \\
&= \{\ -6\ ;\ -4\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ \} \\
\mathbb{S}_3 &= \mathbb{P} \oplus \mathbb{P} \oplus \mathbb{P} \\
&= \{\ -9\ ;\ -7\ ;\ -6\ ;\ -5\ ;\ -4\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ; \\
&\qquad 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\ \}
\end{aligned}$$

Or, $\forall\ n < 3,\ \forall s \in \mathbb{S}_n,\ s < 7$. Et pour $n = 3, \exists\ s \in \mathbb{S}_3$ tel que $s \geq 7$.
Une partie peut donc potentiellement se terminer dès lors que $n \geq 3$ ou autrement dit, il faut jouer un minimum de 3 manches pour terminer une partie.

$\sqsubseteq$

Théorème 2 (TH2) : Il est possible de jouer un nombre illimité de manches sans jamais terminer une partie.

Considérons les deux suites $(\mathbb{S}_{i,n})_{n\in\mathbb{N},i\in\{1;2\}}$ des ensembles contenant les valeurs des scores possibles de chaque joueur ; i représente le joueur, n le numéro de la manche.

Nous devons montrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{\ 1;2\ \},\ \exists\ s_i \in \mathbb{S}_{i,n} \text{ tel que } s_i < 7$$

Nous procédons par récurrence sur n avec $n \in \mathbb{N}^*$ l'indicateur du nombre de manches jouées. Par réccurence sur n, nous allons montrer qu'à chaque manche, il est possible d'effectuer une action permettant de ne pas terminer la partie.

On considère l'hypothèse $H_n : \forall i \in \{\ 1;2\ \},\ \exists\ s_i \in \mathbb{S}_{i,n}$ tel que $s_i < 7$.

H_0, H_1 et H_2 sont vérifiées par le théorème 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*,\ p \geq$ fixé. On suppose que H_p est vérifiée au rang p. Alors $\exists\ s_1 \in \mathbb{S}_{1,p}$ et $s_2 \in \mathbb{S}_{2,p}$, tels que $s_1 < 7$ et $s_2 < 7$.
L'axiome 2 nous indique que le score d'un des deux joueurs va varier, celui du joueur 1 par exemple alors que l'autre score, celui du joueur 2, va rester fixe.

On a alors :

$\mathbb{S}_{1,p+1} = \mathbb{S}_{1,p} \oplus \mathbb{P}^*$ donc $\exists\ s \in \mathbb{S}_{1,p+1}$ tel que $s < 7$.
Par exemple $s = s_1 + (-3) < s_1 < 7$ ou de même, $s = s_1 + (-1) < 7$.
$\mathbb{S}_{2,p+1} = \mathbb{S}_{2,p} \oplus \{0\} = \mathbb{S}_{2,p}$ et donc $s_2 \in S_{2,p+1}$ avec $s_2 < 7$.

H_{p+1} est donc vérifiée. Quel que soit le nombre de manches jouées, il est possible de construire une manche qui ne permette pas de terminer la partie. Ou autrement dit, il est possible de construire une partie infinie.

$\sqsubseteq$

Théorème 3 (TH3) : Le score du vainqueur est égal à 7, 8 ou 9 points.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la partie n'est pas terminée à la manche n. On considère alors l'ensemble

$$Psi_n \subseteq \mathbb{S}_n,\ \Psi_n := \{\ \ s \in \mathbb{S}_n \ /\ s \leq 6\ \}.$$

Ψ_n contient les valeurs des scores des deux joueurs tels que la partie n'est pas finie à la manche n. On peut alors définir, ς_{n+1} l'ensemble des scores que les deux joueurs peuvent atteidre à la manche *n+1* :

$$\Psi_{n+1} := \Psi_n \oplus \mathbb{P}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } &\forall s \in \Psi_n,\ s \leq 6 \\ &\forall p \in \mathbb{P},\ p \leq 3 \\ \text{Donc } &\forall\ \sigma \in \Psi_{n+1},\ \sigma = s + p\ \ \leq 6 + 3\ \ =\ \ 9 \end{aligned}$$

Le score du vainqueur ne peut donc pas excéder 9 points.

$\sqsubseteq$

Théorème 4 (TH4) : Le vainqueur a gagné au minimum 3 manches dans la partie.

Nous avons montré dant le point 9.2.3 qu'un joueur pouvait gagner une partie en trois manches (il gagne les trois manches). Il faut donc montrer qu'il n'est pas possible de terminer une partie sans qu'un joueur ait gagné au moins trois manches. Pour celà il faut considérer une partie terminée avec :

N, le nombre de manches jouées dans une partie terminée ($N \geq 3$).

s_N, le score du vainqueur de la partie ($s_N \geq 7$), $s_N \in \mathbb{S}_N$.

$(s_n)_{0 \leq n \leq N}$, la suite des sores du vainqueur de la partie et $(\mathbb{S}_n)_{0 \geq n \geq N}$ la suite des ensemble contenant les valeurs des scores potentiels de ce même joueur.

On suppose par l'absurde que le joueur vainqueur n'a gagné que deux manches, ou hypothèse plus faible, que son score n'a été modifié que deux fois,

$$\begin{aligned} \text{Alors } \mathbb{S}_N &= \mathbb{P} \oplus \mathbb{P} \\ &= \{\ -6\ ;\ -4\ ;\ -3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ \} \end{aligned}$$

Or, $\forall s \in \mathbb{S}_N,\ s \leq 6$. Donc $s_N \notin \mathbb{S}_N$. Ce qui est impossible.

$\sqsubseteq$

Théorème 5 (TH5) : Le score du perdant est minoré par $m \times (N-3)$ avec N le nombre de manches jouées et $m = min\ (\ \mathbb{P}\ ),\ \ m = -3$.

Le théorème 4, impose que le score du perdant n'a varié au maximum que durant $N-3$ manches. On s'intéresse à $(\mathbb{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$, la suite de l'ensemble des valeurs de scores possibles pour le joueur perdant. On alors $\mathbb{S}_N = \bigoplus_{p=1}^{N-3} \mathbb{P}$. Or, on pourrait montrer par récurrence que $min\ (\ \bigoplus_{p=1}^{N-3} \mathbb{P}\ ) = m \times (N-3)$ avec $m = min\ (\mathbb{P}\ )$.

$\sqsubseteq$

Chapitre E

Documents enseignants

Fiche de préparation 1

Objectif : Entrée des élèves dans la situation, compréhension des règles du jeu et écriture d'un récit de partie.

Durée	Déroulement	Organisation / Rôle du prof	Matériel
20'	**Question : Connaissez-vous ce jeu et ses règles ?** Explication des règles du jeu et présentation du matériel par le professeur et avec l'aide des élèves qui savent jouer. Ecriture au tableau au fur et à mesure des règles données par les élèves. Choix des règles utilisées dans la séquence et distribution de la feuille des règles du jeu. Démonstration de quelques manches et de l'attribution des points par les élèves. Validation des points avec l'aide d'un adulte.	Collectif Professeur : Explique les règles du jeu Par demie classe ou tiers classe avec un intervenant par groupe	Toupies et stadiums Fiche : Règles du jeu (une par élève ou binôme).

20’	**Consigne : Jouez une partie par groupe de 2 et notez les scores sur la fiche de scores. Une fois que vous aurez terminé, vous raconterez cette partie sur la fiche rédaction.** Les élèves jouent, notent les scores et quand ils ont fini rédigent le récit de la partie. Le professeur passe dans les groupes pour aider les élèves dans la partie.	Binôme d’élèves Professeur : Aide ponctuelle et repérage des différents types de récits (score final, nombre de manches, rédactions).	Toupies et stadium Fiche de scores (distribuée avant le début des parties) Fiche 1 : Raconter une partie (distribuée après les parties).
20’	**Mise en commun** Le professeur utilise quelques récits d’élèves (bien choisis) qui sont affichés au tableau pour montrer les différences dans la construction de récits. Exemples de différences : - Même score final mais pas le même déroulement - Ordre des manches - Etc. L’enseignant pose des questions pour amener les élèves à comparer les récits. Exemples : - Les deux récits suivants terminent aux même score, est ce qu’ils se sont déroulés de la même manière ? - Ce récit a plus de manches pourtant il y a eu moins de points marqué, comment est-ce possible ? - Etc. Mise en place de vocabulaire : - Manche - Evénement - Récit - Scénario	Collectif Professeur : Mène la mise en commun et distribue la parole.	Tableau Récits supplémentaires (si nécessaire).

Fiche de préparation 2

Objectif : Etablir des conjectures mathématiques et les justifier / Résoudre des problèmes en construisant un récit.

Durée	Déroulement	Organisation / Rôle du prof	Matériel
5’	**Rappel de la séance précédente.** Le professeur amène les élèves à se remémorer les éléments essentiels de la séance précédente. Exemples : - Règles du jeu - Construction de récits - Qu’est ce qu’un événement ?	Collectif Professeur : Interroge les élèves pour les amener à se souvenir.	-

25’	**Emettre des conjectures mathématiques et les justifier.** **Consigne : De manière individuelle, remplissez la fiche 2 « Imaginer des résultats » en justifiant vos réponses.** Faites attention, il y a deux parties dans la fiche, une où on vous demande ce qu’il s’est passé dans la partie que vous avez jouée et une où on vous demande d’imaginer. Les élèves travaillent individuellement sur la fiche 2 en s’appuyant sur les parties qu’ils ont jouées et leur imagination. L’enseignant passe dans les rangs pour répondre aux questions éventuelles. Bien préciser aux élèves que dans la deuxième partie de la fiche (questions 4 et 5), on leur demande d’imaginer ce qu’il pourrait se passer (et pas seulement de décrire ce qu’il s’est passé).	Individuel Professeur : Aide ponctuelle	Fiche 2 : imaginer des résultats. Fiche : Règles du jeu.
30’	**Ecrire un récit en résolvant un problème.** **Consigne : En binôme ou individuellement, remplissez la fiche 3 « Inventer la fin d’une partie ».** Comme dans la fiche d’avant on vous demande d’imaginer quelque chose qui ne s’est pas passé. Les élèves, en binôme, inventent plusieurs récits pour résoudre le problème. On peut imaginer en fonction du temps de supprimer la question où il faut atteindre 8 points. Par rapport à la question à 10 points, certains élèves risquent de dire que ce n’est pas possible, si c’est le cas leur demander d’expliquer pourquoi au lieu de raconter l’histoire.	En binôme Professeur : Aide ponctuelle	Fiche 3 : Inventer la fin d’une partie. Fiche : Règles du jeu.

NB : Pas de bilan en fin de cette séance, il sera réalisé en début de séance 3.

Table E.1 – Séance 1

Activité	Description	Temps
1.	**Explication des règles du jeu et démonstration de parties :** **Objectif :** Cette étape participe à la dévolution de la situation et permet aux élèves de construire des possibles empiriques (c'est à dire des exemples de parties auxquelles ils pourront se référer dans la suite de la séquence). **Organisation :** Ce travail se déroule collectivement à l'oral. L'enseignant explique les règles du jeu puis on procède à des démonstrations. Lorsqu'une manche est jouée, le groupe classe, aidé par l'enseignant, détermine les points à attribuer. **Documents :** Règles du jeu p. 280	15'
2. & 3.	**Jouer une partie et Ecrire un récit non contraint** **Objectif :** Les élèves écrivent un premier récit de partie. L'objectif est pour eux de raconter la partie qu'ils viennent de jouer afin que leurs camarades aient toutes les informations. **Organisation :** Les élèves par groupe de deux jouent une partie en notant l'évolution des scores. Ensuite, chaque groupe doit raconter la partie qu'il vient de jouer à l'écrit. **Documents :** Fiche 1 : Raconter une partie p. 281 et p. 282 **Rôle du récit :** Utilisation du récit comme outil de formulation, d'organisation et de transmission.	20'
4.	**Recueil collectif des récits/scénarios** **Objectif :** Il s'agit d'un bilan de la première séance **Organisation :** A l'oral, chaque groupe décrit la partie qu'il vient de jouer (nombre de manches, score du vainqueur, score du perdant), l'enseignant au tableau "récolte" tous les renseignements (qui seront utilisés dans les séances suivantes). **Rôle du récit :** Étude du récit en tant qu'objet structuré respectant des caractéristiques et apportant des informations.	25'

TABLE E.2 – Séance 2

Activité	Description	Temps
5.	**Emettre des conjectures et les justifier** **Objectif :** On invite les élèves à émettre des conjectures sur la structure mathématique de la situation en s'appuyant sur les possibles empiriques qu'ils ont acquis et sur imagination (soumise aux contraintes mathématiques). **Organisation :** Deux questions sont posées aux élèves. Ils doivent y répondre de manière individuelle et justifier leur propositions : 1. Quel(s) score(s) peut atteindre le vainqueur d'une partie ? 2. Quel est le nombre de manches nécessaires pour terminer une partie ? **Documents :** Fiche 2 "Imaginer des résultats" p. 283 **Rôle du récit :** Utilisation du récit comme support de construction de possibles. Inscription dans la fiction et dans le domaine du possible pour s'affranchir du réel. Utilisation de l'objet récit comme élément de preuve.	30'
6.	**Ecrire des récits contraints** **Objectif :** Les élèves doivent inventer un récit répondant à certains critères. Ils doivent pour cela s'appuyer sur un raisonnement mathématique pour construire un récit tout en respectant un certain nombre de contraintes mathématiques. **Organisation :** De manière individuelle ou par groupe de deux les élèves inventent la fin d'une partie pour atteindre le score demandé. **Documents :** Fiche 3 Inventer la fin d'une partie p. 284 **Rôle du récit :** Utilisation du récit comme support de sélection, structuration et orgnaisation de d'informations / données. Utilisation du récit comme support de construction de possibles. Inscription dans la fiction et dans le domaine du possible pour s'affranchir du réel. Utilisation de l'objet récit comme élément de preuve.	30'

TABLE E.3 – Séance 3

Activité	Description	Temps
7.	**Débat autour des réponses des élèves** **Objectif :** Permettre aux élèves d'argumenter autour des réponses qu'ils ont construites. **Organisation :** Débat collectif mené par l'enseignant. **Rôle du récit :** Utilisation du récit comme support de construction de possibles. Inscription dans la fiction et dans le domaine du possible pour s'affranchir du réel. Utilisation de l'objet récit comme élément d'argumentation et / ou de preuve.	20'
8.	**Résoudre des problèmes** **Objectif :** On propose aux élèves différents problèmes de mathématiques qu'ils doivent résoudre. L'objectif est qu'ils réinvestissent les connaissances acquises lors des séances précédentes. **Organisation :** Il s'agit d'un travail individuel, par écrit sur plusieurs problèmes de mathématiques. **Documents :** Fiche 4 Résoudre un problème p. 286 **Rôle du récit :** Utilisation du récit comme support de sélection, structuration et organisation d'informations / données. Utilisation du récit comme support de construction de possibles. Inscription dans la fiction et dans le domaine du possible pour s'affranchir de la réel. Utilisation de l'objet récit comme élément d'argumentation et / ou de preuve.	20'
8. (suite)	**Correction des problèmes** **Objectif :** Mettre en évidence les procédures utilisées par les élèves. Comparer les différentes manières de résoudre pour travailler sur la notion de preuve. **Organisation :** Débat collectif mené par l'enseignant.	20'

Chapitre F

Documents élèves experimentation

Règles du jeu

Une partie se joue à deux joueurs. Chacun des joueurs dispose d'une toupie (Figure 1). A chaque manche, les joueurs lancent leur toupie dans un stadium (Figure 2)) et gagnent ou perdent des points selon les règles du jeu présentées ci-arpès.

Déroulement d'une manche

La partie est découpée en manches.

Début de la manche : Au signal, les deux joueurs lancent leur toupie dans le stadium en même temps. **Fin de la manche :** La manche se termine quand :
- une des toupies ne tourne plus
- une des toupies est en zone de pénalité
- une des toupies n'est plus dans le stadium
- un joueur touche le stadium

Attribution des points

Quand la manche est terminée on distribue les points :
- - 1 si tu lances ta toupie à côté du stadium ;
- + 1 si ta toupie tourne plus longtemps que celle de ton adversaire ;
- + 2 si tu coinces la toupie de ton adversaire dans la zone de pénalité ;
- + 3 si tu éjecte la toupie de ton adversaire hors du stadium ;
- - 3 si tu touches le stadium pendant la manche.

Vainqueur

Le premier joueur qui a 7 points (ou plus) gagne la partie.

FIGURE 1 – Toupies

FIGURE 2 – Stadium

4

FIGURE F.1 – Règles du jeu

Prénoms : ____________________________

Fiche 1 : Raconter une partie

Consigne :

En vous aidant des scores que vous avez notés, racontez la partie que vous venez de jouer. Il ne faut pas oublier de détails, il faut que tous les élèves de la classe puissent comprendre ce qu'il s'est passé en lisant votre histoire.

6

Figure F.2 – Fiche 1

Prénoms : ______________________________

Fiche 1 : Tableau des scores

Scores		
Manche	Joueur 1	Joueur 2
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Prénoms : ______________________________

Nombre de manches : ______________________________

Vainqueur : ______________________________

Score du vainqueur : ______________________________

Score du perdant : ______________________________

7

FIGURE F.3 – Tableau de scores

Prénom : ______________________________

Fiche 2 : "Imaginer des résultats"

1. Dans **ta partie**, quel score a eu le vainqueur ? ____________________
2. Dans **ta partie**, quel score a eu le perdant ? ____________________
3. Dans **ta partie**, combien y a-t-il eu de manches ? ____________________
4. **A ton avis**, quel(s) score(s) peut avoir le vainqueur d'une partie ?

   ____

   Justifie ta réponse :

5. **A ton avis**, combien de manches sont nécessaires pour terminer une partie ?

   ____

   Justifie ta réponse :

9

FIGURE F.4 – Fiche 2

Prénoms : ____________________________

Fiche 3 : Inventer la fin d'une partie

Lis la partie que Laura a joué avec Camille et répond aux questions

Je joue contre Camille. À la première manche, ma toupie a tourné plus longtemps donc j'ai gagné 1 point. À la deuxième manche, c'était l'inverse, c'est Camille qui a marqué 1 point parce que ma toupie s'est arrêtée en premier. On est à égalité. A la manche suivante, j'ai lancé ma toupie plus fort et j'ai réussi à coincer la toupie de Camille dans la zone de pénalité. J'ai gagné 2 points.

1. Quel score a Laura ? ________________
2. Quel score a Camille ? ________________
3. Complète le récit pour que :

   (a) Laura gagne avec 7 points

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

10

Figure F.5 – Fiche 3

(b) Laura gagne avec 8 points

(c) Laura gagne avec 9 points

(d) Laura gagne avec 10 points

11

Figure F.6 – Fiche 3 (suite)

Prénom : ______________________________

Fiche 4 : Résoudre un problème

Enoncé 3 : Laura a joué plusieurs manches. Marie est arrivée en cours de partie, voici ce qu'elle a vu. Laura a d'abord gagné 4 points. Ensuite plusieurs manches se sont passées. Quand Marie s'en va, elle se rend compte que Laura a deux points de moins que lorsqu'elle est arrivée. Que s'est-il passé ?

Enoncé 4 : Laura joue aux toupies. Son amie l'observe pendant 7 manches. Pendant les 3 premières manches, elle a gagné 5 points. En tout elle a perdu 2 points. Que s'est-il passé pendant les 4 autres manches ?

12

FIGURE F.7 – Fiche 4

Chapitre G

Productions d'élèves

Simon a marqué 1 point car sa toupie a tourné plus longtemps, ensuite, c'est la même chose. Après Antoine a marqué 1 point car la toupie de Simon est tombée avant la sienne. Après, Simon a marqué 2 points en envoyant la toupie d'Antoine en zone de pénalité. Puis, Simon a marqué 1 point en faisant tourner sa toupie plus longtemps que celle d'Antoine. Ensuite, Antoine marqua 2 fois d'affilée 1 point et après, ce fut le contraire. Simon gagna donc 7-3.

Sim

FIGURE G.1 – Extrait Simon / Antoine

J'ai joué avec Valentina. Elle m'a battue.
Elle a gagné 1 point jusqu'a la 4ème manche ou j'ai
battue Valentina, j'ai gagné 1 point. Puis Valentina a regagnée
1 point, puis moi toujours 1 point et puis elle encore 1 point.
Mais ensuite Valentina [redacted] envoyer sa endeore de l'arène -1 pour
elle, mais elle a regagnée 1 point. Et encore 1 autre point pour
elle. Mais heureusement j'ai regagnée 1 point. Mais
elle m'a gagné avec 1 dernier point. Nous avons [redacted]
remarquées que ma toupis tourne au centre alors que
c'elle de Valentina [redacted] fait des grand ron dans le
stadiume.

FIGURE G.2 – Extrait Valentina

Je joue contre Antoine M. À la première manche, nos toupies
ont tourné très longtemps et c'est la toupie d'Antoine qui est resté
le plus longtemps Score 0-1. La deuxième c'est l'inverse Score 1-1.
Antoine c'est raté il a lancé sa toupie en dehors de l'arène.
Score 1-0 (Seul moment où je menne!) La troisième manche Antoine
avait mal lancé sa toupie. Score 2-0. À la cinquième et à la sixième
Antoine a fait une rimonté incroyable Score 2-2. Ensuite, je
reprends l'avance Score 3-2. Ensuite, on a tous les deux toupies
à la vertical mais Antoine à gagner. Score 3-3. À mon tour,
j'ai mal lancé ma toupie qui est sortie de l'arène dès le lancement.
Score 2-3. Ensuite, Antoine ~~a~~ pris une belle avance Score 2-5.
Ensuite j'ai réussi à remporté ma dernière manche Score 3-5.
Malheureusement, Antoine a gagné ses deux dernières manche.
Car sa toupie a tourné plus longtemps.
Score final 3-7. Vainqueur, Antoine!!

FIGURE G.3 – Extrait Antoine

Chapitre H

Tableaux d'analyse

Réponses des élèves pour la tâche 1 :

Conjecturer sur des caractéristiques de parties non jouées et justifier les conjectures

MA	Justification basée sur le matériel	7
RJ	Justification bassée sur les règles du jeu	12
EXP	Justification basée sur l'expérience des parties vécues	6
PE	Justification basée sur des possibles explicatifs	68
	Pas de justification	8
AUTRE	Autre type de justification (Hors sujet)	12

	Reproduction de la réponse donnée par l'élève		Justification		Valeur		
	Conjecture	Justification	Type	N°	7	8	9
E25	18	Il peut gagner toutes les manches en faisant tourner sa toupie plus longtemps même si il a déjà 7 points	MA	1	-	-	-
E26	7, 8 et 9	Il peut gagner 7 fois un point si sa toupie tourne plus longtemps que celle de l'adversaire 7 fois. 9 points si on expulse trois fois la toupie de l'adversaire. 8 points si on expulse deux fois la toupie de l'adversaire et si on l'envoie une fois dans la zone de pénalité.	PE	1			
E27	7, 8 et 9	7 s'il vient de mettre un point. 8 s'il met deux points. 9 s'il met 3 points.	PE	2			
E28	7	Car normalement il est pas très fort	AUTRE			-	-
E29	Infini	Mais quand dans une partie on a que des 2 ou des 3 et bien des fois on ne peut pas atteindre les 7 points et bien on arrive à 8,9, 10, 11, 12 ...	RJ	2			
E30	15	J'ai éjecté 2 fois mon adversaire, ça me fait 6 points; Puis j'ai mis 2 fois sa toupie dans a zone, ça me fait 10 points. Puis mon adversaire, sa toupie s'est arrêtée après moi 5 fois. Ça lui fait 5 points. Puis ma toupie s'est arrêtée 5 fois après elle, ça me fait 15 points, j'ai gagné.	PE	1	-	-	-
E31	10	En faisant 8 manches tu peux avoir 10 points. Exemple : 1+1+1+1+1+1+1+3 = 10. Donc 10 points.	PE	1	-	-	-
E32	Entre 8 et 100	On peut avoir autant de points que possible	AUTRE		-		
E33	HS (6-2)	J'ai gagné : La première perdue, deuxieme perdu, troisième gagné, quatrième gagné, cinquième gagnée, sixième perdu, 7ème gagné.	NON TERMINEE				
E34	7, 8 et 9	Pour 7 points, il pourrait éjecter ma toupie du stadium, cela lui fait 3 points. Il peut éjecter ma toupie cela lui fait 3 points et il pourrait faire que sa toupie tourne plus longtemps que moi. Cela lui ferait 1 point donc il aurait 7 points. Pour 8 points, pareil sauf qu'au lieu qu'il tourne plus longtemps il m'enverrai dans la zone de pénalité cela lui ferait 2 points, donc il aurait 8 points. Pour 9 points pareil, sauf qu'au lieu de m'envoyer dans la zone, il m'éjecterai du stadium, il aurait 3 points, donc il aurait 9 points	PE	2			
E35	9	Mais après je peux pas savoir car nous avons pas fini	AUTRE				
E36	9	Il peut avoir trois points s'il marque 3 fois 3 points	PE	1			
E37	7	Car il faut 7 points pour que la partie se finisse	RJ	1			
E38	7, 8 et 9	Car la partie se finit au bout de 7 points.	RJ	2			
E39	9	Car 3 fois 3, ça fait 9, ça fait plus de 7 et le maximum c'est 9.	PE	1			
E40	7	-	NON JUSTIFIE				
E41	9	Il a 3 points pendant 3 parties (manches).	PE	1			
E42	7, 8 et 9	9 : il a éjecté trois fois la toupie de l'autre adversaire. 8 : il a éjecté 4 fois la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité. 7 : Pendant 7 parties sa toupie a tourné plus longtemps.	PE	1			
E43	10	En faisant 10 ou 11 manches	PE	3			
E44	10	En faisant 11 manches car j'ai gagné 1 fois.	AUTRE				
E45							
E46	7	L'autre s'arrête tout le temps (identique à sa partie)	EXP	1			
E47	7	Parce qu'il a 4 points et que je pense qu'il m'aurait éjecté du stadium alors il aurait gagné 7 à 2.	PE	1			
E48	9 ou même infini	Parce que s'il gagne 3 points en éjectant l'autre à l'extérieur du stadium. + 2 points si j'éjecte la toupie dans la zone. -1 point si la toupie sort du stadium. +2 si la toupie est éjecté du stadium. +1 si la toupie s'arrête en dernier et +1 points si la toupie se réarête en dernier. *Parce que si on gagne des points et on les perd on peut faire une partie infinie.*	PE	3			
E49	9	A la première manche il gagne 1 point. A la deuxième manque il éjecte la toupie (3). A la troisième manche il met la toupie dans la zone (2). A la quatrième manche il met la toupie dans la zone (2). A la cinquième manche il gagne 1 point. 1+3+2+2+1 =9.	PE	1			
E50	7 et 8	Je pense que le vainqueur peut avoir 8 et 7 points car on a fait maximum 14 manches et sur le tableau on voit que les vainqueurs ont 7 points et deux vainqueurs ont eu 8 points.	EXP	1			
E51	7 ou 8	Le vainqueur peut avoir 7 ou 8 points s'il envoie la toupie de l'adversaire dans un trou il remporte plus de points.	PE	1			
E52	7, 8, 9	Il peut avoir 7 points car il aura fait soit que des 1 ou trois 2 et un 1 ou deux 3 et un 1. Il peut avoir 8 car s'il fait six 1 et un 2 ou trois 2 et un 2.	PE	1			9 barré
E53	7, 8, 9	Il peut en voir 7 car si on est à 6 points et qu'on met 1 point on a 7 points. On peut avoir 8 oints car si le joueur a 6 poins et qu'il met 2 points cela fait 8 points. On peut avoir 9 points car si le joueur a 6 points et qu'il met 3 points cela fait 9 points.	PE	2			

E54	9	J'ai mis 9 parce qu'il y a 18 manches.	MA	
E55	7,8	Le vainqueur peut avoir entre 7 et 8 points parce que la majorité des vainqueurs ont eu 7 points voire 8 points.	EXP	1
E56	7,8		NON JUSTIFIE	
E57	7,8		NON JUSTIFIE	
E58	7, 8, 9	Si on est à 6 points et que la toupie de l'autre s'arrête on est à 7 points. Si on est à 6 points et qu'on envoie la toupie de l'autre dans la zone de pénalité on est à 8 points. Si on est à 6 points et qu'on éjecte la toupie en dehors de l'arène on a 9 points.	PE	2
E59	7, 8, 9	Car il peut avoir 6 points et éjecter la toupie de son adversaire donc il gagne 3 points; Et ça peut être pareil pour il a 6 points et il coince la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité donc il gagne 2 points.	PE	2
E60	21	S'il gagne à chaque fois 3 points il peut avoir au total 21 points. Car s'il marque à chaque fois 3 points en 7 manches il aura 21 points en tout.	RJ	3
E61	12	Si le gagnant fait 3 + 3 + 2 + 3 = 12 donc il peut avoir 12 points.	PE	3
E62	7, 8 ...	A mon avis il peut avoir plus de 7 ou 8 points car on peut faire les 18 manches si on veut. Aussi on gagne 1, 2 ou 3 points ou on peut perdre 1 ou 3 points.	RJ	2
E63	7, 8, 9	Le vainqueur a soit 7, 8 ou 9. Car le minimum c'est 7. Il peut gagner 8 ou 9 car si le joueur a déjà 6 et qu'il marque 1 points ça fait 7, s'il marque 2 points il a 8 et qu'il marque 3 il a 9.	PE	2
E64	7, 8 ou 9	Le vainqueur peut avoir 7, 8 ou 9 points car quand il en est à 6 points il peut gagner 1, 2 ou 3 points. S'il gagne 1 points il aura 7, 2 il aura 8, 3 il aura 9. Mais s'il avait 5 points et qu'il gagne 3 points il aura 8. Mais le maximum est donc de 9 points.	PE	2
E65	7 à 9	A mon avis le vainqueur ne peut pas aller au dessus de 10 car les points s'arrete à 7.	RJ	2
E66	14	Je pense ça parce que C'est 7 points minimum.	RJ	2
E67	7 à 10	Le nombre 7 est celui qu'on trouve le plus souvent. Mais plus on fait de manches plus on a de points donc on peut aussi avoir 10.	EXP	2
E68	7, 8, 9	Si quelqu'un a 6 points et qu'il éjecte la toupie de l'autre en dehors du stadium il marque 3 points, ce qui lui fait 9 points et il est déclaré vainqueur parce qu'il a plus de 7 points. Il peut aussi avoir + 1 ou +2 pour avoir 7, 8 ou 9 points.	PE	2
E69	7, 8, 9	LE vainqueur peut avoir 9 points car s'il a 6 points et s'il éjecte l'autre toupie du stadium il gagne + 3 points donc il a 9 points. Le joueur peut avoir 8 points car s'il a 6 points et qu'il envoie la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité il a gagné 8 points. Et enfin si le joueur a 6 points et qu'il gagne une manche il a 7 points	PE	2
E70	9	Il peut avoir 9 points pour l'adversaire quand la toupie sort du statium l'adversaire a gagné 1 point.	AUTRE	
E71	9	9 points c'est le maximum car si on éjecte de l'arène la toupie advese 3 fois cela fait 9 points car 3x3=9.	PE	1
E72	~~7,8~~ 9 au maximum	Car si on éjecte 3 fois la toupie adverse hors du stadium on a 9 points parce que 3x3=9.	PE	1
E73	7	Parce que le vainqueur doit avoir 7 points pour gagner la partie. Le maximum est de 7 points pour gagner la partie.	RJ	1
E74	8	A la première mache le joueur 1 a eu 2 points parce qu'il a éjecté la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité. A la deuxième manche le koueur 2 a gagné 1 point parce que sa toupie a tourné plus longtemps que le joueur 1 ...	PE	1
E75	7	A la première manche la toupie de mon adversaire s'est arrétée avant donc j'ai +1. A la deuxième manche j'ai coincé la toupie de mon adversaire à la zone de pénalité donc j'ai +2, à la troisième manche j'ai éjecté la toupie de mon adversaire donc +3/ A la quatrième manche la toupie de mon adversaire s'est arrétée avant la ...	PE	1
E76	10	J'ai 7 points, après j'envoie la toupie hors du stadium, c'est +3 et 7+3 = 10 alors j'aurai 10 points.	PE	3
E77	9	Le gagnant peut avoir que 9 points sinon soit on a pas fini les manches soit on a trop fait.	AUTRE	
E78	7, 8, 9	Emre a 6-0, Emre gagne 1 point. Il y a 7-0. Emre a 6-0. Emre gagne 2 points. Il y a 8-0. Emre a 6-0. Emre gagne 3 points. Il y a 9-0.	PE	2
E79	9	A la première manche le joueur 1 a gagne 3 points parce qu'il a éjecté l'autre toupie. A la deuxième manche elle a gagné 2 points parce qu'elle a coincé la toupie du joueur 2 en zone de pénalité. Troisième manche ...	PE	1
E80	9	A la première manche la toupie du joueur 1 ne s'est pas arrétée donc il a 1 points. Deuxième manche la toupie du joueur 1 ...	PE	1
E81	7, 8 ou 9	Parce que quand tu as 7 tu a gagné. Donc on part de 6 points. Après si tu as +1 ça te fait 7 points, si tu as +2 ça te fait 8 point, et si tu as +3 ça te fait 9 points.	PE	2
E82	7, 8 ou 9	Car par exemple j'envoie la toupie de mon adversaire, je l'envoie dehors, ça me fait + 3 points et encore j'envoie la toupie de mon advefsaire dehors ça me fait +3 points ou bien si la toupie de mon adversaire s'arrete avant moi ça me fait +1 point et la t'arrive, ça me fait 7 points.	PE	1
E83	12	Le maximum est 12 car il y a 12 manches.	MA	1
E84	8	2 points si on éjecte la toupie de l'adversaire dans la zone de péanalité. 1 point si la toupie de l'adversaire s'arrête de tourner. 3 points si on éjecte la toupie de l'adversaire à l'exterieur du stadium. 2 points si on éjecte l'adversaire une nouvelle fois la toupie de l 'adversaire dans la zone de pénalité.	PE	1
E85	12	Car il y a 12 lignes possibles	MA	1
E86	~~38~~ 12 6	Dans une partie on peut avoir 6 points 3+3 = 6. 4 + 24 = 12 points dans une partie.	PE	3

E87	7, 8, 9	1+1+1+1+1+1+3 =9 Il devrait s'arreter à 9.	PE	1
E88	7	Elle tourne et elle s'arrete pendant 7 manches.	PE	1
E89	7	Il a 7 points parce qu'il a éjecté du stadium et parce qu'il a poussé la toupie	PE	1
E90	Celui qui a plus de 6	Quand moi je joue après avoir joué 11 fois je compte mes points et si j'ai plus que mon advesaire je gagne mais seulement si j'ai plus de 6.	RJ	2
E91	+1 + 1 +2 + 3	Le vainqueur doit avoir +3 +2 +2 ou + 3 +1 +1 +1 ou +2 +2 +3 et le vainqueur peut avoir 7 points ou plus.	PE	1
E92	9	Il peut avoir 9 points en faisant 1 point jusqu'à 9	PE	1
E93	12	Il peut avoir 12 points en 9 manches en faisant 2 + 5 + 1 + 3 + 1 +2 = 12	PE	3
E94				
E95	7	La première partie Lucas a gagné 1 point. La deuxième partie Luca a gagné 1 point. La troisième partie j'ai gagné 1 points. La quatrième partie Lucas gagne 1 point . Cinquième partie, ma toupie est sorti du stadium tout seul j'ai eu -1. Sixième il m'a sorti du stadium, +3. La sept, il gagne 1 point.	EXP	1
E96	12	En faisant 12 manches en gagnant +3+3+1+2+3	PE	3
E97	12	On peut avoir 12 points car il y a que 12 cases	MA	1
E98	9	C'est la première manche, la toupie de Lena s'arrête et Ines gagne. Après Léna met la toupie de Ines dans la zone de péanlité. Lena gagne	PE	1
E99	7,8 ou 9	Le gagnant à la première partie il gagne 3 points s'il éjecte du stadium. A la deuxième	PE	1
E100	9	1ère manche il gagne 1 point. Deuxiè§me manche il gagne 1 point. 3ème manche il gagne 1 point. 4ème manche il gagne 1 point. 5 èem manche il gagne 3 points. 6ème manche je gagne 1 point.	PE	1
E101				
E102	9	Elle m'a gagné car y a 12 manches	MA	1
E103	7	Parce que il y a que 1 manches. Il peut gagner 1 point par partie.	RJ	1
E104	8	Si l'élève joue douze manche et gagne. Fait sortir la toupie de l'adeversaire il gagne 3 points . Il amène la toupie dans la zone de pénalité, il gange 2 points et il touche la stadium puis 3 points.	PE	1
E105	3	La toupie peut sortir du stadium le vainqueur gagne 3 points et aussi il touche le stadium de gagné 3 points.	HS	
E106	3	On doit mettre a toupie pénalité.	HS	
E107	7,9	Il faut sortir trois fois l'adversaire et il gagne 3 points par manche. Il gagne 7 points en 7 manches.	PE	1
E108	9	1ère manche mon adverfsaire a gagné 2 points car il m'a mis dans la zone de pénalité.	PE	1
E109	11	Première manche, il a jeté la toupuie dehors et il a eu 3 points. Deuxième manche il met la toupie dehors et il gagne 3 points . Troisième manche, il envoie la toupie dans la zone des pénalité et il a eu 2 points. Quatrième manche il renvoie la toupie dans la zone de pénalité et il a eu 2 points. Cinquième manche sa toupie s'arrete avant l'autre toupie et il a eu 1 point.	PE	3
E110	9	Il peut jouer 10 manches pour avoir 9 points. Sa toupie s'arrete 1 point. Je met sa toupie dehors, 3 points. Sa toupie s'arrete 1 points. Je mets sa toupie dehors 3 points. Sa toupie en zone de péanlité 2 points. Sa toupie s'arrete, 1 point.	PE	1
E111	10	Première manche il gagne 3 points parce qu'il éjete la toupie de son adversaire. 2ème manche, il gagne 2 points. 3ème manche il gagne 2 points encore une fois. 4ème manche il regagne 3 points. Le eperdant a perdu parce qu'il touche toujours le staidum ou sa toupie.	PE	3
E112	Plus de 7	On doit avoir plus de 7 points pour être le vainqueur.	RJ	2
E113	7	Le vainqueur peut éjecter la toupie du stadium et avoir 3 points.	PE	1
E114	1 jusqu'à 12 points.	On peut avoir 1 point jusqu'à 12 points.	MA	1
E115	7, 8, 9	Le score minimal est de 7 mais ça peut être 8 ou 9 si on a 6 et après on fait +2 ou +3.	PE	2
E116	7, 8, 9	On peut avoir 9 points en 3 manches (si tu éjecte 3 fois la toupie de l'autre hors du stadium). On peut avoir 8 points en 4 manches (si on jecte la toupie de l'autre) et 7 points si on éjecte de fois la toupie de l'autre et que la toupie tourne plus longtemps	PE	1
E117	7, 8, 9	7 en une partie on peut faire 7. 8 si la toupie tourne plus longtemps aux huit parties (8x1). 9 si tu veux l(éjecter 3 fois de suite (3x3).	PE	1
E118	7, 8, 9	Si on a 6 points et qu'on en marque 1, ça fait 7 points. Si on a 6 points et qu'on en marque 2 ça fait 8 points. Si on a 6 points et qu'on en marque 3 ça fait 9 points.	PE	2
E119	7 et à l'infini	Ca peut être à l'infini parce que ça dépend des manches.	AUTRE	
E120	7, 8, 9	Car soit on tombe directement sur 7 points à la fin. Ou si tu as 6 points et que tu marques 2 points tu arrives à 8. Et si tu as 6 points et que tu marques 3 points tu arrive a 9.	PE	2
E121	9	Car s'il a 3+3+3	PE	1
E122	5	5 car les parties sont troop longues et avec 5 elles seront plus courtes en faisant 3+1+1, 3+3+2	AUTRE	
E123	7, 8, 9	7 : 3+2+2 ; 8 : 3+3+2 ; 9 : 3+3+3	PE	1
E124	7 ou plus	Ca dépend de la partie	AUTRE	
E125	8 et 9	Sachant qu'il y a 7 manches +1 pour chaque manche = 7 points. Mais si c'est varié ex +1+1_1+3+2=7 points donc on peut faire pareil car la il y a 5 manches.	PE	1
E126	7,8,9		NJ	
E127	7,8, 9	Si on a 6 points et que ensuite on marque 3, 1, 2 ça donnera 9, 8 ou 7 points.	PE	2
E128	8,9	Parce que 8 points c'est 3+3+2=8 et 9 points c'est 3+3+3	PE	1
E129	8,9	Parce que 3+3+3=9 et 3+3+2=8	PE	1
E130	7,8,9	Car si tu as 6 points tu peux marquer 1, 2 ou 3 points.	PE	2
E131	7,8,9	7,8 ou 9 parce que si tu as 6 points tu peux en gagner 3, 2 et 1	PE	2
E132	7 ou plus	Parce que la partie s'arrete quand un des joueurs a 7 ou plus et c'est lui qui a gagné.	RJ	2

E133	7 ou plus	Si on fait que des pénalités dans la zone, si tu arrete pas de l'envoyer en dehors du stadium. Si ta toupie arrete pas et …. Si ta toupie reste plus longtemps.	PE	3			
E134	9	Parce que 3+3=6 encore 3 points=9 Donc le maximum c'est 9 points et le perdant 0 points.					
E135	7		NJ				
E136	7,8,9	Car si on marque 6 points	PE	2			
E137	7,8,9	9 car six fois ta toupie tourne plus longtemps et 1 fois tu éjecte la toupie de ton adversaire hors du stadium	PE	1			
E138	7,8,9	Car il y a eu une éjection hors du stadium et 2 éjections dans la zone de pénalité. 1 pour moi et 1 pour eux.	EXP	1			

Chapitre I

Extraits de transcription

Transcription Minimum / Maximum

CM1 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches maximum

¤ (0:50:50.0) P1 : Après par rapport au nombre de manches, on va pas compter celle la parce que ... (non terminée), combien vous avez au niveau des nombre de manches ? Qu'est ce que vous pouvez me dire ? *(Au tableau un tableau récapitulatif des parties est affiché, groupe/nombre de manches/score du vainqueur/score du perdant)*. Qui n'a pas parlé ?

¤ (0:51:12.0) P2 : Allez Mossi, Jonathan ... Ah bah tu n'étais pas la, Lina hier.

¤ (0:51:18.6) P1 : Combien y a-t-il de manches dans les parties que vous avez joué ? Combien il y a de manches par exemple dans le groupe deux ?

¤ (0:51:27.1) Classe : Dix.

¤ (0:51:29.8) P1 : Dix. Dans quel groupe il y a le moins de manches ?

¤ (0:51:37.3) E1 : Neuf

¤ (0:51:37.4) P1 : Dans le groupe neuf y a que six manches. Dans quel groupe il y en a le plus ?

¤ (0:51:41.4) E2 : Le onze.

¤ (0:51:47.3) P1 : Dans le groupe onze. Donc la ... les manches, ça va de six à treize. Est ce qu'il peut y avoir plus que treize manches ?

¤ (0:52:01.3) E3 : Oui.

¤ (0:52:04.5) E4 : Bah oui.

¤ (0:52:05.2) E5 : Non

¤ (0:52:06.7) P1 : On joue toujours à deux.

¤ (0:52:09.9) E6 : Bah alors non !

¤ (0:52:11.1) E7 : Bah si.

¤ (0:52:12.1) E8 : Bah si il peut y en avoir ... plus de treize.

¤ (0:52:15.6) E9 : Si si il peut y en avoir à

¤ (0:52:19.0) P1 : Alors ...

¤ (0:52:21.6) E10 : Il peut y en avoir plein,

¤ (0:52:26.3) E11 : Il peut y en avoir plein.

¤ (0:52:26.7) P1 : Alors ?

¤ (0:52:28.4) E12 : A l'infini. l'infini. le mec il gagne ...

¤ (0:52:33.6) P1 : Ceux qui me disent qu'on ne peut pas avoir plus de treize manches. Pourquoi ils disent qu'il n'y en a pas plus que treize.

¤ (0:52:43.2) E13 : Mais si il peut y en avoir plus.

¤ (0:52:46.8) P1 : Plus personne pense non alors ?

¤ (0:52:47.9) E14 : Bah non.

¤ (0:52:51.2) E15 : Eh bin la ou y a eu le plus de manches c'était la ou il y avait trois joueurs et tous les autres ils étaient deux et y en a eu moins.

¤ (0:53:02.2) E16 : On peut faire plus un moins un plus un moins un ...

¤ (0:53:03.4) P1 : Si ... Ici la c'est la partie où ils étaient trois joueurs et c'est la qu'il y a eu le plus de manches, et que quand vous étiez que deux joueurs il y a eu moins de manches que ça.

¤ (0:53:17.9) E17 : Oui mais il y aurai pu en avoir aussi plus.

¤ (0:53:18.0) E18 : Bah oui !

¤ (0:53:18.8) E17 : Parce qu'on aurait pu faire des moins un, des moins trois.

¤ (0:53:21.1) E18 : Bah oui si on fait exprès.

¤ (0:53:24.6) P1 : Alors, on ne peut pas ... vous me dites qu'on peut en faire plus.

¤ (0:53:32.9) E19 : A l'infini.

¤ (0:53:33.6) P1 : A l'infini (écrit au tableau). Donc a l'infini. Est ce que tout le monde a compris pourquoi ?

¤ (0:53:55.4) Plusieurs élèves : Oui.

¤ (0:53:57.8) E20 : Plus un moins un plus, plus trois ...

¤ (0:54:00.1) P1 : Alors est ce que tu peux expliquer pourquoi ?

¤ (0:54:12.2) E21 : Parce qu'on peut gagner des points et en perdre.

¤ (0:54:18.6) P1 : On peut gagner des points et en perdre. Et donc qu'est ce qu'il se passe si ... comme on peut perdre des points qu'est ce que ça fait ?

¤ (0:54:35.3) E22 : Ca peut diminuer les points.

¤ (0:54:42.4) P1 : Les points, donc qui pourrait me donner un exemple ? Avec ... on va prendre que les points du joueur un. Il part de zéro.

¤ (0:54:51.6) E23 : Il fait plus trois.

¤ (0:54:52.8) P1 : Il fait plus trois. Donc il éjecte la toupie hors ...

¤ (0:54:57.5) E23 : Après il fait moins un.

¤ (0:54:59.4) P1 : Après il fait moins un donc il a ?

¤ (0:55:01.2) Classe : Deux points.

¤ (0:55:05.0) E23 : Après plus deux.

¤ (0:55:06.5) P1 : Donc il a ?

¤ (0:55:06.9) E24 : Quatre.

¤ (0:55:09.3) E23 : Après il fait moins trois.

¤ (0:55:14.3) E25 : Donc il a un.

¤ (0:55:15.1) E23 : Moins trois et puis moins un. Et il se retrouve à zéro.

¤ (0:55:17.5) P1 : Et il se retrouve à zéro. Et puis on recommence. Et puis la partie elle se termine ...

¤ (0:55:23.2) Classe : Jamais.

CM1 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches minimum

¤ (0:55:26.5) P1 : Ca c'est est ce qu'on peut autant qu'on veut. Après la, la partie qui est allée le plus vite, ils ont fait six manches. Je vais vous la lire peut être. Groupe neuf. Je vous la raconte et je vais vous noter les scores en même temps. Alors ... il y a joueur un et joueur deux. Au début de la partie, Lina a failli me mettre dans la zone de pénalité, à la fin j'ai perdu car je me suis arretée en première. Donc le joueur deux a marqué un point. Ensuite, on a commencé et puis Lina a arrété les toupies et c'est Magdalena qui a marqué un point. Après c'est Lina m'a mis dans la zone de pénalité, donc le joueur deux a marqué deux points. Après c'était la toupie de Magdalena est allé dans la zone de pénalité. On en est à quatre. Après les deux toupies ... la toupie de Magdalena a été ejectée.

¤ (0:57:36.4) E26 : C'est pas possible.

¤ (0:57:38.6) E27 : Bah si tout est possible.

¤ (0:57:41.1) P2 : Quoi ?

¤ (0:57:45.0) P1 : C'est ce qu'elles ont raconté.

¤ (0:57:48.1) E28 : Ca fait que cinq manches.

¤ (0:57:48.9) P1 : Ca fait que cinq manches ? Ah oui il en manque une au milieu. Il en manque une au milieu. Il y a encore une toupie qui est partie en zone de pénalité. Elles n'avaient pas très bien marqué leurs scores. Cette fois c'est bon ?

¤ (0:58:36.6) P2 : Six manches, quatre et ...

¤ (0:58:39.0) P1 : Non y a que six points.

¤ (0:58:45.4) E29 : Cinq six sept huit.

¤ (0:58:47.8) P2 : Six, sept, huit, c'est ce que tu as marqué dans le grand tableau récapitulatif.

¤ (0:58:50.3) P1 : Ok bon bah c'est bon. huit à quatre et six manches.

¤ (0:58:55.9) E30 : Mais la ça fait huit.

¤ (0:58:58.8) P1 : Oui la y a huit points parce qu'à la fin elle a marqué trois points d'un coup. Est ce que on peut imaginer une partie, donc la y a six manches. Imaginez une partie où il y aurai cinq manches seulement. Qu'est ce qu'on pourrait modifier dans leur histoire, pour qu'il n'y ait plus que cinq manches.

¤ (0:59:38.3) P2 : C'est pas moi qu'il faut regarder, c'est P1.

¤ (0:59:40.6) E31 : Dans la première manche, au lieu qu'elle gagne un point, on remplace par deux.

¤ (0:59:52.9) P1 : Du coup la si on arrete, ça c'est la manche un deux trois quatre cinq six. Donc tu dis si la on remplace le un par un deux. Non ça marche plus ?

¤ (1:00:10.6) E32 : Par un trois.

¤ (1:00:11.7) P1 : Par un trois.

¤ (1:00:13.3) E33 : Mais après t'es obligé de gagner.

¤ (1:00:17.0) E34 : Mais non.

¤ (1:00:19.5) E35 : Oui mais il a gagné déja.

¤ (1:00:19.9) P1 : Si le joueur deux au début marque trois points, comment elle marque trois points ?

¤ (1:00:24.4) E36 : Elle éjecte

¤ (1:00:25.3) P1 : En éjectant. Après on laisse tout pareil ?

¤ (1:00:28.9) E37 : Oui.

¤ (1:00:31.2) E38 : Mais la il peut jamais aller à neuf. Donc la, la partie se termine, c'est pas grave.

¤ (1:00:35.8) P1 : si on n'arrive pas à neuf ou ...

¤ (1:00:40.6) P2 : C'est le nombre de manches qui change.

¤ (1:00:42.2) P1 : C'est juste le nombre de manches. Donc la effectivement ... la c'est même pas en cinq manches c'est encore en dessous. C'est en quatre manches.

¤ (1:00:55.6) E39 : On peut faire en trois

¤ (1:00:58.1) P1 : Alors ça c'est en

¤ (1:01:00.5) Elèves dans la classe: Trois

¤ (1:01:00.8) P2 : Oui.

¤ (1:01:03.7) P1 : En trois manches.

¤ (1:01:06.1) E40 : Trois, trois, un.

¤ (1:01:07.0) P1 : Qui dit deux ?

¤ (1:01:10.2) E41 : Non, trois, trois, un.

¤ (1:01:12.5) P1 : Trois ...

¤ (1:01:15.6) E42 : Trois, trois, trois.

¤ (1:01:18.2) P1 : Donc, on change pas. La case d'après ?

¤ (1:01:21.4) E43 : Trois.

¤ (1:01:21.8) E44 : Trois, trois, deux aussi.

¤ (1:01:23.8) P1 : Trois pour qui ?

¤ (1:01:25.3) E45 : Pour J2.

¤ (1:01:29.9) P2 : Ca c'est toutes les combinaisons possibles.

¤ (1:01:32.7) E46 : Ou un ou deux, un ou deux.

¤ (1:01:35.4) E47 : Deux, deux.

¤ (1:01:36.2) P1 : Allez un.

¤ (1:01:43.9) E48 : Et la on peut pas faire deux manches.

¤ (1:01:46.2) E49 : Non.

¤ (1:01:50.5) E50 : C'est impossible.

¤ (1:01:53.1) P1 : Alors pour deux manches ?

¤ (1:01:55.4) E51 : On peut pas faire parce que c'est trois, trois, six maximum.

¤ (1:01:58.6) P2 : Tout le monde est d'accord ?

¤ (1:01:59.7) Classe : Oui.

¤ (1:02:04.7) E52 : C'est six on peut pas aller plus loin.

¤ (1:02:06.5) P1 : Et on ne peut pas aller plus loin. La ça fait que

¤ (1:02:09.9) E53 : Six.

¤ (1:02:11.0) P1 : Six points. Donc, ce qu'on voit, c'est qu'on peut pas faire ... quand on invente une histoire, quand on invente une partie on peut pas faire n'importe quoi. On ne peut pas avoir un vainqueur qui a plus que dix points, on est obligé d'avoir sept huit ou neuf et on ne peut pas faire moins de trois manches. Sinon on n'arrivera pas jusqu'au bout.

CM2 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches maximum

¤ (0:47:33.5) M : Alors par rapport au nombre de manches que vous avez joué ? La au maximum vous avez joué 12 manches ...

¤ (0:47:42.7) E1 : Non moi quinze

¤ (0:47:44.1) M : Vous quinze ?

¤ (0:47:45.3) E2 : On a pu en faire dix-huit au maximum.

¤ (0:47:48.1) E3 : Non on a joué quinze manches.

¤ (0:47:49.1) M : Ca c'était sur le papier qu'on pouvait en faire dix-huit (*Référence au format de la feuille distribuée*)

¤ (0:47:52.2) E4 : Mais on peut en faire autant qu'on veut.

¤ (0:47:53.0) M : Alors ...

¤ (0:47:55.0) E4 : Bah oui tu marques un point, tu perds un point.

¤ (0:47:58.4) Enseignante : Avec les pénalités oui.

¤ (0:47:59.3) M : Alors, combien de manches on peut faire au maximum ?

¤ (0:48:02.5) Elève 1 : Autant qu'on veut

¤ (0:48:04.4) Elève 2 : Douze

¤ (0:48:04.8) M : Douze

¤ (0:48:07.0) Elève 3 : Mais non, quinze

¤ (0:48:08.2) Elève 2 : Mais non on en a fait douze

¤ (0:48:08.8) M : Alors, on va noter vos réponses quand même, j'ai un douze, j'ai un quinze

¤ (0:48:14.6) E5 : Quatorze.

¤ (0:48:15.5) E6 : Dix-huit.

¤ (0:48:19.0) E7 : On peut faire à l'infini en fait.

¤ (0:48:20.7) E8 : Ouais à l'infini.

¤ (0:48:22.5) E9 : Ouais parce qu'à chque fois on fait moins trois ...

¤ (0:48:25.0) E10 : Trois le minimuum.

¤ (0:48:28.0) M : Au maximum je veux.

¤ (0:48:32.0) E20 : Au maximum cent.

¤ (0:48:35.0) E21 : Moi c'est onze.

¤ (0:48:40.3) M : Alors onze, alors y en a déjà qui ont fait 12 part ... manches, donc c'est au moins plus que onze de toute façon.

¤ (0:48:46.5) Elève 4 : Moi je dis que c'est 3

¤ (0:48:49.3) M : Au maximum, donc ...

¤ (0:48:51.1) Elève 5 : Infini

¤ (0:48:53.1) M : Qui c'est qui est d'accord avec l'infini ?

¤ (0:48:54.6) E22 : Mais on peut pas.

¤ (0:48:57.2) E23 : C'est pas possible.

¤ (0:48:58.5) E24 : Bah si.

¤ (0:48:59.4) E25 : Bah non.

¤ (0:48:59.5) E26 : Ca s'arrète bien à un moment.

¤ (0:49:02.5) E27 : Bah non.

¤ (0:49:03.4) E28 : Y a pas assez de temps.

¤ (0:49:03.8) E29 : Mais non tu lances la toupies tu gagnes des points.

¤ (0:49:06.0) M : Alors est ce que quelqu'un peut m'expliquer pourquoi on peut arriver jusqu'à l'infini ?

¤ (0:49:11.8) E30 : Mais on pourra jamais.

¤ (0:49:14.4) E31 : Par exemple sa toupie elle, par exemple elle fait trois points en éjectant la toupie de l'autre et après il touche le stadium.

¤ (0:49:21.4)M : Et donc ?

¤ (0:49:22.5) E31 : Et bien après il a zéro points. Après ...

¤ (0:49:26.0) E32 : Et bien sa toupie elle s'arrete, euh elle tourne plus longtemps que l'autre et après il lance pas la toupie dans le stadium. Ca fait zéro.

¤ (0:49:35.2) M : Alors, dans ce ... Est ce que tout le monde a compris, comment il raisonne ?

¤ (0:49:40.0) Classe : Oui

¤ (0:49:41.0) M : Toi t'étais pas d'accord, tu disais qu'on pouvait pas faire un nombre de manches infni, et toi aussi tu étais pas d'accord au début

¤ (0:49:48.6) Elève 6: Non parce que y a pas assez de temps

¤ (0:49:52.4) M : Et maintenant ? Si y avait un temps infini ?

¤ (0:49:56.8) Elève 6 : Bah oui la on pourrait

¤ (0:49:58.1) M : On pourrait

¤ (0:49:58.9) Elève 6 : Bah oui et on voudrait pas.

¤ (0:50:03.8) E33 : Jouer jusqu'à l'infini ...pfff.

¤ (0:50:11.1) E34 : Au bout d'un moment il va être un peu épuisé.

¤ (0:50:14.5) M : Alors *(pause)* donc, ce qu'on peut remarquer, c'est que au départ on a l'impression qu'on peut faire un peu n'importe quel genre de partie, avec un nombre de points, un peu ... y en a qui m'ont dit qu'on pouvait avoir dix points, qu'ils pouvaient avoir onze points, autant de points qu'ils voulaient ... Ce qu'on voit c'est que quand on respecte bien les règles du jeu, on a dit qu'on pouvait jamais aller à plus de neuf points, qu'on pouvait avoir un nombre de manches infinir et je vous ai aussi demandé le nombre de manches minimum.

CM2 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches minimum

¤ (0:51:01.6) E35 : C'est trois

¤ (0:51:02.7) E36 : Sept.

¤ (0:51:05.5) M : Alors vous au minimum la vous avez fait sept manches

¤ (0:51:10.5) Elève 7 : Non mais on peut faire deux manches aussi, trois manches aussi. Si on fait trois manches. On fait trois trois, ça fait déja six et on prend un point.

¤ (0:51:18.5) M : Alors, y en a qui disent six

¤ (0:51:25.0) Classe : Mais non, trois

¤ (0:51:27.0) M : Y en a qui disent, trois

¤ (0:51:30.6) E37 : Moi je dis six.

¤ (0:51:32.2) M : Alors, quelqu'un qui veut essayer de convaincre que c'est pas six.

¤ (0:51:43.0) E38 : Bah par exemple trois fois trois neuf. Ou deux fois trois six plus deux points, ça fait huit.

¤ (0:51:47.7) M : Alors est ce que tu as compris ce qu'il voulait dire ? Vous écoutez parce que faut qu'il comprenne. Alors réexplique.

¤ (0:51:59.5) Elève 8 : Si on prend le nombre le plus grand, c'est trois. On essaye de faire trois neuf six donc c'est moins, donc trois fois trois neuf. Ou alors y a d'autres possibilités.

¤ (0:52:12.8) M : Donc trois fois trois neuf, ça veut dire qu'on joue trois manches, trois manches et à chaque manche on gagne trois points.

¤ (0:52:23.9) E39 : C'est rare.

¤ (0:52:25.6) Enseignante : C'est rare mais ... la question c'est pas de savoir si c'est rare c'est comment on peut gagner en moins de manches possibles.

¤ (0:52:33.0) E40 : C'est même impossible.

¤ (0:52:35.9) M : Moi, la je parle de parties imaginaires, donc alors ... est ce qu'on pourrait faire moins de trois manches ?

¤ (0:52:44.9) Elève 9 : Non

¤ (0:52:46.6) E41 : Non parce que le maximum c'est trois points.

¤ (0:52:51.6) M : Alors ?

¤ (0:52:53.1) Elève 10 : Parce que si on fait que deux manches au maximum c'est six points

¤ (0:53:00.3) M : Maxence est ce que tu peux répeter ce qu'elle a dit ?

¤ (0:53:05.7) Maxence : J'ai pas entendu.

¤ (0:53:11.3) M : Non t'as pas écouté.

¤ (0:53:21.9) Enseignante : Maxence.

¤ (0:53:26.0) M : Pourquoi on peut pas faire moins de trois manches ?

¤ (0:53:28.7) Maxence : Parce que en fait, on peut dire le maximum c'était deux manches et bien le maximum c'est six points

¤ (0:53:34.8) M : Pourquoi ?

¤ (0:53:35.6) Maxence : Pour pas que ça se termine.

¤ (0:53:37.6) M : Ok

CM2 – Extrait Séance 2 – Proposition d'un événement à 4 points

¤ (0:53:39.9) Maxence : Et pourquoi y a pas un quatre ? Comme ça on pourrait faire dix

¤ (0:53:43.4) M : Si y avait un quatre, oui on pourrait faire dix

¤ (0:53:45.9))Maxence : On ferait trois ... trois ... quatre

¤ (0:53:48.8) M : Et si y avait un quatre ?

¤ (0:53:50.6) Maxence : On pourrait même faire huit. On pourrait faire en deux. Quatre quatre.

¤ (0:53:54.6) M : Alors, si on pouvait gagner quatre points, c'est intéressant, alors ...

¤ (0:54:01.3) E41 : On pourrait faire sept en deux, hein on pourrait faire sept en deux.

¤ (0:54:05.8) M : Alors, Maxence propose qu'on puisse gagner 4 points. Si on change les règles on dit qu'on peut gagner 4 points avec une certaine action, on sait pas laquelle mais c'est pas grave.

¤ (0:54:22.3) E42 : Après c'est facile pour gagner des points.

¤ (0:54:24.6) M : Alors, du coup quel score maximum on peut atteindre ? Alors ? Il faut toujours 7 points pour gagner. Est ce qu'on peut atteindre 7 points ? Qui est d'accord pour 7 points ?

¤ (0:54:39.5) Classe : "moi", "bah non"

¤ (0:54:40.7) M : Est ce qu'on peut aller jusqu'à sept points ?

¤ (0:54:42.2) Elèves : Bah oui ! Au dessus même.

¤ (0:54:45.7) E43 : On l'a déja fait.

¤ (0:54:49.9) E44 : On peut aller que jusqu'à huit.

¤ (0:54:50.1) M : huit. points ?

¤ (0:54:51.7) E45 : C'est pas possible.

¤ (0:54:53.7) M : Huit oui.

¤ (0:54:54.4) E46 : Ah oui c'est vrai.

¤ (0:54:55.7) E47 : On peut faire dix même.

¤ (0:54:56.1) E48 : Neuf.

¤ (0:54:56.4) E49 : Mais non.

¤ (0:54:57.4) M : Neuf ?

¤ (0:54:58.8) E50 : On peut aller jusqu'à ... ohla.

¤ (0:55:00.6) E51 : Jusqu'à dix on peut même.

¤ (0:55:02.4) E52 : Dix.

¤ (0:55:04.7) E53 : Sept, huit, neuf, dix.

¤ (0:55:07.3) E54 : Onze.

¤ (0:55:08.5) E55 : Non.

¤ (0:55:09.5) M : Ceux qui ne sont pas d'accord avec onze.

¤ (0:55:11.0) E56 : Mais non on peut que aller jusqu'à dix. On peut pas aller ...

¤ (0:55:14.6) E57 : On peut pas aller jusqu'à dix.

¤ (0:55:15.6) E56 : Si si si si on peut aller jusqu'à dix.

¤ (0:55:17.2) E58 : Vas-y comment ?

¤ (0:55:18.7) E56 : Parce que tu fais huit points, quatre et quatre huit et ...

¤ (0:55:22.1) E59 : T'as terminé la partie.

¤ (0:55:23.0) E60 : Ouais mais elle est terminée.

¤ (0:55:26.6) E61 : Maximum huit.

¤ (0:55:32.1) E62 : Non maximum dix.

¤ (0:55:33.9) E63 : Non c'est neuf.

¤ (0:55:34.4) M : Alors dix ou neuf ?

¤ (0:55:35.7) E64 : C'est dix.

¤ (0:55:37.9) E65 : Neuf.

¤ (0:55:39.9) M : Alors, trois secondes de silence explique pourquoi c'est dix à ton voisin.

¤ (0:55:45.4) E64 : Parce que on fait quatre, après on fait deux points ça fait six. Et puis encore quatre et ça fait dix.

¤ (0:55:54.9) E65 : Ah ouais.

¤ (0:55:56.1) M : Ca fait dix.

¤ (0:55:58.3) E66 : Quatre et deux plus quatre, ça fait dix.

¤ (0:56:00.1) M : Ok.

CM3 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches minimum

¤ (1:00:15.9) P1 : Par rapport au nombre de manches. Qui avait mis quatre manches ? Trois manches ? presque tout le monde. Deux manches ... Alors comment tu avais expliqué ?

¤ (1:00:38.8) E10 : Euh j'avais dit qu'elle était à trois points, trois et trois six et un.

¤ (1:00:44.1) P1 : Donc tu avais fait par rapport à la partie qui était déja écrite. Et si on commence à zéro zéro.

¤ (1:00:52.7) E10 : Bah trois manches.

¤ (1:00:54.4) P1 : Trois manches. Alors est ce que quelqu'un peut m'expliquer pourquoi il faut trois manches ?

¤ (1:00:59.4) E11 : Parce qu'on peut faire trois fois trois est égal neuf.

¤ (1:01:03.4) P1 : Trois fois trois égal neuf. Va falloir expliquer un peu plus que ça.

¤ (1:01:10.4) E11 : En trois manches, on met ... à chaque manche on met trois points.

¤ (1:01:23.3) P1 : A chaque manche *(écrit au tableau)* on met trois points. Oui. Et donc, est ce que ça suffit ? Qu'est ce qu'il faut rajouter ?

¤ (1:01:47.8) E11 : En éjectant la toupie de l'autre.

¤ (1:01:48.4) P1 : Oui en éjectant quelque part.

¤ (1:01:57.2) E12 : Mais qu'on est obligé qu'en trois manches on avait dit en trois manches, que si on fera pas le même ... c'est sept le minimum pour gagner une partie

¤ (1:02:05.2) P1 : Oui

¤ (1:02:06.3) E12 : Alors que deux fois trois ça fait que six. Alors on a pas gagné.

¤ (1:02:13.8) P1 : Alors c'est sept le minimum pour gagner *(écrit au* *tableau, deux fois trois ça fait que six*) ... alors toi tu m'as toujours pas fini pourquoi ça veut dire qu'on peut pas faire moins de trois manches.

¤ (1:02:53.4) E10 : Euh parce que si on fait deux manches et qu'on met le maximum c'est à dire trois en éjectant ça fera que six.

CM3 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches maximum

¤ (1:03:02.6) P1 : (*Ecrit au tableau*) Ok. Est ce que tout le monde est d'accord avec ça, est ce que quelqu'un a une autre idée pour justifier. C'est tout bon. Donc c'est vraiment, c'est ce qu'ils ont dit. Ils ont dit à peu près la même chose c'est qu'à chaque fois on peut gagner que trois points au maximum. Maintenant dernière question, donc la c'était le minimum de manches. Et c'est quoi le maximum de manches qu'on peut jouer ? Alors ici on a fait jusqu'à ... quatorze. Déjà est ce qu'il y en a qui pense qu'on peut faire plus de quatorze ? Qui pense qu'on peut faire plus que quatorze ? Plus que quatorze ...(*Des élèves lèvent le doigt*) alors y en a beaucoup. Est ce qu'il y en qui pensent qu'on peut pas faire plus de quatorze. Pourquoi ?

¤ (1:04:31.4) E11 : Bah ... bah non, puisqu'on peut avoir des moins.

¤ (1:04:38.6) P1 : On peut avoir des moins. (*Efface le tableau*) On peut avoir des moins. Alors qu'est ce que ça t'apporte ? Ca fait quoi ? Qu'est ce qu'il se passe si on peut avoir des moins ? On peut avoir

moins un c'est ça que tu veux dire, on peut avoir moins un point. Alors qu'est ce que ça fait du coup qu'on puisse avoir moins un point ?

¤ (1:05:21.8) E11 : Ca permet ... déjà ça permet de faire une manche de plus.

¤ (1:05:29.3) P1 : Donc ça fait qu'on peut faire une manche de plus. Parce que si on perd un point il faut le regagner. Et par exemple c'était la partie du groupe dix, c'était qui le groupe dix ?

¤ (1:05:51.3) P3 : Antoine et Thomas.

¤ (1:05:52.7) P1 : Antoine et Thomas.

¤ (1:05:54.6) P3 : Ils l'ont leur papier. Apporte le, rassemblez le et donnez le.

¤ (1:06:01.7) P1 : Donc dans leur partie, à la fin il y avait sept à trois et c'était à la manche quatorze il y avait sept à trois et à la manche treize il y avait six à trois. Alors comment ça se passerait du coup ce que tu as expliqué. Qu'est ce qu'il pourrait se passer ? Qu'est ce qu'il y aurait pu se passer ?

¤ (1:06:29.7) E11 : Bah que par exemple euh ... celui qui avait six il aurait eu moins un ils auraient fait quinze manches.

¤ (1:06:37.1) P1 : Ca c'est la vraie manche et du coup, ce qu'il dit c'est que si à la manche quatorze il avait perdu un point on serait revenu à cinq trois et on aurait pu faire une manche de plus pour gagner. Donc on aurait pu faire

¤ (1:06:55.7) E12 : Quinze manches.

¤ (1:06:56.6) P1 : Quinze manches. Combien on aurait pu faire en tout ?

¤ (1:07:01.4) E13 : On peut pas définir ça dépend si l'autre il perd à chaque fois des points. Ca ferait plus de manches.

¤ (1:07:13.9) P1 : Ca ferait plus de manches oui.

¤ (1:07:14.5) E14 : Bah jusqu'à l'infini.

¤ (1:07:16.5) P1 : Jusqu'à l'infini. Alors est ce que tout le monde est d'accord avec ça ? Jusqu'à l'infini ? Y en a qui font un peu ... non. Pas tous ...

¤ (1:07:29.8) E15 : Bah ça fait un peu beaucoup quand même l'infini mais on peut aller à beaucoup moins.

¤ (1:07:34.1) P3 : A beaucoup moins.

¤ (1:07:38.7) P1 : On peut aller a beaucoup. Alors ceux qui pensent qu'on peut aller jusqu'à l'infini, comment ils expliqueraient ?

¤ (1:07:44.5) E16 : Bah de toute façon si on gagne un point et qu'on en perd après .... ça fait plus un moins un plus un moins un.

¤ (1:07:52.7) P1 : Donc si (*ecrit au tableau*} à chaque fois on gagne un point et on le perd. Si tu racontes l'histoire ça se passe comment ? Pour gagner un point sa toupie elle tourne ...

¤ (1:08:15.9) E16 : Plus longtemps.

¤ (1:08:16.1) P1 : Plus longtemps et à la manche d'après.

¤ (1:08:17.6) E16 : Il la met à coté.

¤ (1:08:19.8) P1 : Il la met à coté, donc il fait plus un moins plus un moins un et la partie elle peut pas s'arreter.

¤ (1:08:31.1) E17 : Moi je dis que c'est pas possible parce qu'au bout d'un moment y aura ... C'est obligé que y ait une toupie qui marque des points.

¤ (1:08:40.3) P1 : Après c'est vrai que dans la réalité, ça parrait difficile d'imaginer une partie qui s'arreterai jamais. Mais après si on fait juste des hypothèses, c'est ça qu'on fait en imaginant, des hypothèses, si on reste juste dasns un monde avec que des hypothèses est ce que ça serait possible ?

¤ (1:09:02.1) E18 : Oui.

¤ (1:09:03.0) Plusieurs élèves : Oui.

¤ (1:09:03.7) P1 : Oui. Est ce que tout le monde est convaincu maintenant ? ... Oui. C'est plus dur l'infini. Tu voulais dire quelque chose ?

¤ (1:09:24.0) E19 : C'est pas possible parce que euh ... l'infini ça veut dire que ça s'arrete jamais. Et une partie ça s'arrète forcément.

¤ (1:09:33.5) P1 : Dans le monde réel, oui ça va tout le temps s'arreter. Après la on a montré que on aurait pu rajouter une manche, et puis rajouter une manche et puis rajouter une manche ...

¤ (1:09:48.9) E19 : Oui.

CM4 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches minimum

¤ (0:15:17.2) Carole : Deuxième question, je sais c'est pénible pour vous d'être toujours en collectif.

¤ (0:15:24.3) E25 : Non, c'est trop bien.

¤ (0:15:28.8) Carole : Ecoutez vous. Nissa ?

¤ (0:15:29.9) Nissa : C'était combien de manches dans une partie.

¤ (0:15:35.1) Carole : Alors combien de ...

¤ (0:15:38.0) E26 : Minimum

¤ (0:15:38.8) Carole : Alors ...

¤ (0:15:39.8) E26 : Minimum c'est trois.

¤ (0:15:41.6) Carole : Eh bien, attend. Combien de manches par partie ? Donc déjà je voudrai avoir votre avis, ce que vous vous avez expliqué sur votre feuille. Yasmine ? Toi tu avais écrit combien ?

¤ (0:16:04.9) Yasmine : Sept.

¤ (0:16:05.7) Carole : Sept, pourquoi ?

¤ (0:16:07.6) Yasmine : Bah maitresse moi j'ai pensé que si t'as zero ... si tu fais un un un ... sept fois un et bien tu aura direct sept.

¤ (0:16:17.7) Carole : Donc tu veux dire qu'à chaque manche on gagne ...

¤ (0:16:20.3) Yasmine : Un

¤ (0:16:21.0) Carole : Un point.

¤ (0:16:24.3) Nathan : Maitresse j'avais un deuxième avis. Je crois c'est trois plus trois plus un.

¤ (0:16:31.5) Carole : Donc combien de parties ?

¤ (0:16:32.2) Nathan : Trois.

¤ (0:16:32.9) Carole : Combien de manches pardon ?

¤ (0:16:34.2) E28 : Deux.

¤ (0:16:36.3) E27 : Euh trois.

¤ (0:16:37.2) Carole : En trois manches ?

¤ (0:16:37.4) E29 : J'allais le dire maitresse.

¤ (0:16:38.6) Carole : Attend, laisse moi finir après je t'écoute.

¤ (0:16:42.0) Nathan : Trois.

¤ (0:16:42.2) Carole : Donc il gagne trois points encore trois points ...

¤ (0:16:45.5) Nathan : Et plus un.

¤ (0:16:47.2) Carole : Un point. Emre ?

¤ (0:16:49.0) Emre : Sinon en ... quatre parties.

¤ (0:16:53.1) Carole : Quatre parties ?

¤ (0:16:54.0) E28 : Maitresse on a déjà ... parce que le minimum.

¤ (0:16:56.2) Nissa : Manches.

¤ (0:16:56.5) Carole : Quatre manches, merci Nissa.

¤ (0:16:58.4) E28 : Maitresse, déjà en trois parties mais c'est bon. On peut faire jusqu'à douze.

¤ (0:17:02.6) Carole : Alors mais je ne sais pas. Qu'est ce que vous vous en pensez ?

¤ (0:17:05.0) E29 : Trois minimum parce que c'est ... on peut pas faire deux parce que ... il faudra ... y a quoi qui fait trois virgule quatre y pas alors pour moi c'est trois.

¤ (0:17:17.6) Carole : D'accord, est ce que vous avez compris pourquoi en trois manches c'est le minimum pour gagner ?

¤ (0:17:26.9) E30 : Nous on en a fait cinq avec ...

¤ (0:17:28.1) Carole : Nathan on va demander un autre élève de réexpliquer. Pourquoi il faut au minimum jouer trois manches pour pouvoir gagner la partie ? Lucas ?

¤ (0:17:39.6) Lucas : Bah parce que sinon avec deux ... avec deux c'est ... puisque trois, trois c'est le nomnbre maximum.

¤ (0:17:45.7) Carole : Donc ? Même si on gagne à chaque fois trois et trois. On atteint pas encore sept.

¤ (0:17:50.9) E31 : On arrive à six.

¤ (0:17:51.9) Carole : Donc on est obligé de rejouer une troisième partie. Mathis s'il te plait. Sukayna.

¤ (0:17:58.1) Sukayna : En deux manches si tu fais trois plus trois et bien vu que trois c'est le maximum ça fait six et ça fait pas sept.

¤ (0:18:03.4) Carole : Ok. Wassinne c'est toi qui fait du bruit la ?

¤ (0:18:05.7) Wassine : De quoi ?

¤ (0:18:05.8) Carole : Je sais pas ça fait du bruit c'est pénible.

¤ (0:18:07.6) Wassine : C'est pas moi.Pourquoi tu dis tout le temps que c'est moi ?

¤ (0:18:12.8) Carole : Il y a eu d'autres réponses sur vos feuilles, j'aimerai bien qu'on en parle à l'oral.

¤ (0:18:16.8) E32 : Moi j'ai écris trois.

¤ (0:18:18.2) Carole : Tu as écris trois. Qui a écrit un autre nombre de manches par partie ? Nawel.

¤ (0:18:23.9) Nawel : Moi j'ai écrit vingt.

¤ (0:18:26.3) Carole : Et vingt pourquoi ?

¤ (0:18:27.9) Nawel : Bah parce que en fait ... tu sais pour euh ... dix ...

¤ (0:18:36.2) Carole : Oui mais quelle action tu dois faire pour gagner dix points d'un coup.

¤ (0:18:40.6) E33 : Bah on peut pas.

¤ (0:18:40.9) Carole : Y en a pas.

¤ (0:18:43.2) Nawel : Maitresse si ...

¤ (0:18:49.1) Carole : Nawel tu te tiens bien ? J'aimerai bien que toute la classe t'écoute. Alors ? Est ce que ving manches c'est possible ? Pour une partie.

¤ (0:18:56.1) Classe : Non, oui.

¤ (0:18:57.0) Youssef : Eh maitresse ?

¤ (0:18:59.0) Carole : Oui, Youssef pourquoi ?

¤ (0:19:00.2) Youssef : Parce que maitresse c'est ... en ving manches. Et bien si les toupies elles arretent pas de rater plusieurs fois ...

¤ (0:19:05.5) Carole : Comment ça ?

¤ (0:19:06.5) Youssef : Ca veut dire

¤ (0:19:07.6) Carole : Exprime toi mieux.

¤ (0:19:09.2) Youssef : En vingt manches et bien si ... Et bien les deux toupies elles sont parties en même temps dans les deux cotés ça fait pas de points.

¤ (0:19:21.7) Carole : Quel coté ?

¤ (0:19:23.4) Youssef : En déhors du stadium.

¤ (0:19:28.4) E34 : Penalité.

¤ (0:19:28.8) Carole : Non si tu lances ... à l'exterieur du stadium pardon ?

¤ (0:19:33.7) E35 : Trois points.

¤ (0:19:35.8) E36 : Moins trois.

¤ (0:19:38.2) Carole : Tu perds trois points. Vas y continue dans ta ... réponse.

¤ (0:19:43.2) Youssef : Et plus trois plus trois ... ça fait six. Encore plus trois

¤ (0:19:46.0) Carole : Mais non tu nous a dis que ... on perd trois points, si on lance à l'exterieur.

¤ (0:19:50.9) Youssef : Alors si il perd trois points ou sinon maitresse en trois manches il peut faire ... et bien les deux toupies s'arretent en même temps.

¤ (0:20:02.3) Carole : D'accord mais tout à l'heure tu as commencé à dire quelque chose ? Qui est qui voit ? Mathis ?

¤ (0:20:07.5) Mathis : Bah maitresse il a dit que si ils font plusieurs sorties de ... plusieurs sorties de stadium

¤ (0:20:16.7) Carole : Oui, qu'est ce qu'il se passe ?

¤ (0:20:18.9) E37 : On perd des points.

¤ (0:20:21.5) Carole : Donc ...

¤ (0:20:21.8) Mathis : On perd des points on perd des points. Donc plus on perd de points, plus on fait de manches.

¤ (0:20:26.7) Carole : Très bien. Parce qu'il faudra récupérer tous ces points pour arriver jusqu'à sept. Wassine s'il te plait !!

¤ (0:20:32.8) Wassine : J'ai fait quoi ?

¤ (0:20:33.5) Carole : Tu chantes !

¤ (0:20:34.7) Wassine : Non je chante même pas.

¤ (0:20:39.0) Mathis : Le maximum ...

¤ (0:20:39.2) Carole : Y a des choses à dire.

¤ (0:20:39.8) Mathis : Le maximum c'est douze.

¤ (0:20:42.7) Carole : Pourquoi ?

¤ (0:20:45.8) Mathis : Parce que on doit faire douze manches.

¤ (0:20:47.1) Carole : Pourquoi est ce qu'on doit faire douze manches ?

¤ (0:20:47.8) Mathis : Bah je sais pas.

¤ (0:20:49.0) Carole : Est ce que c'est marqué dans les règles du jeu ?

¤ (0:20:51.5) Classe : Oui, non.

¤ (0:20:52.6) Carole : Nissa, Nissa.

¤ (0:20:54.5) Nissa : Dans la feuille y avait écrit ... y avait douze manches.

¤ (0:21:00.1) Carole : Elle a la même idée que toi. Mais laisse la s'exprimer aussi. Donc Nissa.

¤ (0:21:05.0) Nissa : Dans la feuille y avait écrit douze manches et après si on en rajoute ça va ... on va.

¤ (0:21:10.1) E38 : Le maximum c'est douze.

¤ (0:21:12.6) Nissa : Parce que y aura pas assez de place.

¤ (0:21:14.5) Carole : Est ce qu'on vous a obligé de vous arreter au tableau qui contenait douze lignes ?

¤ (0:21:20.0) Classe : Non.

¤ (0:21:20.9) Carole : Non. Donc c'était le petit piège pour certains. C'est pas parce qu'il y avait douze lignes, Youssef, qu'il fallait faire douze manches. Donc le minmum c'était trois pour gagner.

CM4 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches maximum

¤ (0:21:33.5) Carole : Et est qu'on a un maximum ?

¤ (0:21:35.5) Classe : Non

¤ (0:21:36.9) Carole : Moi je voudrais savoir pourquoi.

¤ (0:21:38.1) E40 : Douze !

¤ (0:21:39.7) Carole : Douze pourquoi ?

¤ (0:21:40.9) E40 : Douze parce que si tu fais plus un plus un plus un moins un moins un moins un ... après tu fais douze manches mais ... tu fais des moins un et tu perds des points.

¤ (0:21:50.4) Carole : Oui mais ...

¤ (0:21:52.3) E40 : Bah t'arrives à douze manches.

¤ (0:21:53.8) Carole : Comment tu le sais faudrait jouer pour faire ça. Yasmine ?

¤ (0:21:57.1) Yasmine : EUh bah euh ...

¤ (0:22:04.8) Carole : Est ce qu'on pourrait trouver un nombre maximum de manches. Merci ! Sukayna ?

¤ (0:22:14.0) Sukayna : Bah y a pas de maximum puisqu'on peut gagner à n'importe quelle manche ou on peut perdre à n'importe quelle manche.

¤ (0:22:22.6) Yasmine : Ca dépend de la taille de la feuille aussi.

¤ (0:22:25.3) Emre : Non ça dépend des personnes.

¤ (0:22:27.2) Carole : Emre ?

¤ (0:22:27.6) Emre : Ca dépend des personnes parce que les personnes ils tirent pas pareil, parfois euh ... en trois manches ils ont déjà gagné. Y en a d'autres qui font onze manches, d'autre qui font en six manches euh ... mais y a pas de maximum.

¤ (0:22:40.8) Carole : Donc on rejoint l'idée de Youssef en même temps que le tienne. Vu qu'on peut perdre beaucoup de points on peut mettre plus de temps pour arriver à sept.

¤ (0:22:51.0) Emre : Y a pas de maximum.

¤ (0:22:52.0) Carole : Et donc bah comme ça on ne peut pas définir de maximum. D'accord ?

¤ (0:22:55.5) E41 : Maitresse, il peut y en avoir douze milliards et tout ça.

¤ (0:22:57.3) Carole : AH peut être pas quand même

¤ (0:22:58.3) E41 : Bah si (Bavardages)

¤ (0:23:05.0) Carole : Il faudrait à chque fois que les deux personnes perdent. Lucas vas-y.

¤ (0:23:10.3) Lucas : Bah par exemple je sais pas moi. EUh ... Liam contre jason par exemple. Bah Jason il gagne puis Jason il perd, Jayson il gagne, Jayson il perd, Jayson il gagne, Jayson il perd. Donc tu vois bah après ça fait comme ça.

¤ (0:23:22.4) Carole : Et oui si vous gagnez un point à chaque fois ?

¤ (0:23:26.0) E42 : Mais quand tu perds ?

¤ (0:23:26.5) Carole : Il en perd ? Tu as raison !

¤ (0:23:28.4) E43 : Mais maitresse quand on perd, Lucas quand on perd on perd pas des points.

¤ (0:23:30.6) Lucas : Bah si.

¤ (0:23:33.0) E43 : Quand on perd une manche on perd des points ? On perd pas des points.

¤ (0:23:39.1) Carole : Si, si tu lances ta toupie en dehors du stade tu perds trois points.

¤ (0:23:43.8) E43 : Mais pas pour ça mais si tu perds la manche, t'as perdu mais tu perds pas des points.

¤ (0:23:47.4) Lucas : Si, ah si tu perds un point.

¤ (0:23:53.3) E43 : Maitresse si tu perds la manche si il s'arrete en premier bah il ... on fait pas moins un.

¤ (0:23:58.6) Carole : Ah non, d'accord la tu as raison. Mais si tu ...

¤ (0:24:03.9) Lucas : Mais si parce que si tu perds la manche tu perds un point.

¤ (0:24:06.3) Classe : Non.

¤ (0:24:07.8) Carole : Non, non, non. Non. Si tu lances ta toupie à coté du stadium tu as moins un. En dehors du stade.

¤ (0:24:22.8) Lucas : Bah ça fait pas moins un, c'est si tu perds la manche que tu as moins un.

¤ (0:24:23.8) Carole : Non Lucas, à aucun moment c'est marqué ça dans les règles donc tout à l'heure ... Lucas maintenant tu vas écouter ce que je te dis. Y a la règle ici, c'est la règle pour la classe. Après peut être qu'il y a d'autres règles en déhors de l'école mais la on est partis la dessus. Quand ta toupie s'arrete tu ne perds pas un point, c'est l'autre qui gagne un point. D'accord ? Alors à relire. D'accord ?

¤ (0:24:55.3) Lucas : Bah pour moi c'était comme ça.

¤ (0:24:59.3) Carole : C'est tout bon ?

¤ (0:25:01.0) Classe : Oui.

CM5 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches minimum

¤ (0:40:17.2) L : Alors, s'il vous plait, tout le monde est attentif, une dernière chose et après on fait des petits problèmes. En combien de manches ça peut se jouer au minimum ? Le plus vite possible. En combien de manches on peut finir une partie.

¤ (0:40:47.8) E1 : En trois manches.

¤ (0:40:49.2) L : Trois. Explique moi.

¤ (0:40:50.6) E1 : On peut gagner d'abord trois.

¤ (0:40:53.4) L : Oui.

¤ (0:40:54.3) E1 : Après on regagne trois et encore trois.

¤ (0:40:58.9) L : Et ça lui fait ?

¤ (0:41:00.0) E1 : Neuf.

¤ (0:41:01.1) L : Est ce qu'elle est obligée de gagner trois points à la dernière manche pour gagner ?

¤ (0:41:03.5) E2 : Non.

¤ (0:41:05.2) L : Baptiste ?

¤ (0:41:05.7) Baptiste : Elle peut en gagner deux.

¤ (0:41:07.0) L : Oui. Ca fait huit points.

¤ (0:41:09.6) Baptiste : Et on peut gagner un.

¤ (0:41:12.1) L : Ca marche. Sinan ?

¤ (0:41:14.0) Sinan : On peut gagner un point.

¤ (0:41:16.0) L : Un point ça lui ferait ?

¤ (0:41:17.9) Sinan : Sept.

¤ (0:41:19.2) L : Sept, c'est à dire que la personne qui a six points, il lui suffit de gagner au minimum un point pour gagner. Quelque soit sa manière de faire. Donc c'est possible de gagner en tout, en combien de manches en tout alors une partie.

¤ (0:41:34.4) E3 : Trois parties.

¤ (0:41:35.9) L : Trois manches exactement.

¤ (0:41:38.4) E4 : Trois manches tu peux gagner toutes les parties.

CM6 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches minimum

¤ (0:46:44.7)JP : Alors, on va faire une petite mise en commun sur a ton avis combien de manches minimum sont nécessaires pour terminer une partie. Donc j'ai des trois, trois, dix manches, trois, euh ...

¤ (0:47:12.4)E14 : Qui a mis dix manches ?

¤ (0:47:18.1)JP : J'ai des trois, des six, un dix ... encore un dix, un douze. Alors ceux qui ont mis ... j'ai une majorité de trois, j'ai des douze, des dix, des six. Ceux qui ont mis des six, Marie-Emilie tu en penses quoi ? Ou des dix ou des douze ? Combien de manches au minimum sont nécessaires pour terminer une partie ?

¤ (0:47:49.0)Marie-Emilie : Bah, (Inaudible)

¤ (0:48:02.2)JP : J'ai pas compris tu peux répéter ?

¤ (0:48:03.8)Marie-Emilie : Y a par exemple sept points

¤ (0:48:08.7)JP : Oui

¤ (0:48:09.6)Marie-Emilie : Et après l'autre il gagne par exemple trois points, (inaudible)

¤ (0:48:24.8)JP : Donc est ce que tu as bien compris ? Je pense que tu n'as pas bien compris la question qui peut essayer de lui expliquer, effectivement ce que tu dis c'est un exemple de partie possible. On peut faire un nombre de manche énorme et c'est pas Valentin qui dira le contraire puisque vous en aviez fait combien ?

¤ (0:48:42.5)Valentin : Quatorze

¤ (0:48:44.4)JP : Mais y en a qui ont fait moins de manches que ça. Y en a qui ont fait six. Y en a même qui ont fait cinq. Mais cinq ils étaient pas arrivés au bout de la partie. Donc, la on n'est pas en train de voir ce qu'il s'est fait, on est en train de voir ce qui pourrait se faire. Quel est le nombre minimum. Est ce que quelqu'un peut gagner en une partie. En une manche. Une partie est ça peut se gagner en une manche ?

¤ (0:49:10.9)Classe : Non

¤ (0:49:13.3)JP : Pourquoi ?

¤ (0:49:14.4)E15 : Parce que y a pas sept d'un coup ou huit d'un coup, y a pas huit points pour un truc.

¤ (0:49:24.3)JP : Donc alors quel est le nombre minimum de manches ? Pauline.

¤ (0:49:30.0)Pauline : Trois, parce que si tu prend le maximum de points deux fois déjà ça fait six puis après t'es obligé d'en reprendre une autre parce que ça fait pas sept points. Ca fait trois (manches)

¤ (0:49:48.6)JP : Qu'est ce que ça te dit ? Donc est ce que vous êtes d'accord avec l'argumentaire de Pauline, qui peut le redire l'argumentaire de Pauline ? Pourquoi elle justifie, comment elle justifie le fait que effectivement le nombre minimum de manches dans une partie c'est trois ? Clément ?

¤ (0:50:07.3)Clément : Bah elle a dit si tu fais deux fois plus trois et plus un. En deux manches t'as six points donc il faut en rajouter un ... enfin.

¤ (0:50:22.2)JP : Alors est ce que vous pensez que c'est possible de gagner six points en deux manches ?

¤ (0:50:27.9)Classe : Oui. Ca peut arriver.

¤ (0:50:32.0)JP : Oui non ?

¤ (0:50:33.2)Classe : oui, non.

¤ (0:50:36.7)JP : Oui non, vous justifiez ? Oui ou non ?

¤ (0:50:37.9)Ruth : Ca peut arriver oui.

¤ (0:50:39.7)JP : Et pourquoi ça peut arriver ? Et pourquoi y en a qui disent non alors ?

¤ (0:50:47.0)E16 : Parce que y a trois points plus trois points.

¤ (0:50:48.6)JP : Donc c'est tout a fait possible. Sauf que ça vous est pas arrivé à vous la dernière fois parce que éjecter une toupie du stadium ça doit pas arriver tant que ça. Est ce que y en a qui ont éjécté la toupie du stadium ?

¤ (0:50:59.2)E17 : Y a Hugo il m'a éjecté.

¤ (0:51:02.1)JP : Il t'a éjecté.

¤ (0:51:03.0)E17 : Mais au tout début, c'est souvent au début parce qu'on a plus de vitesse.

¤ (0:51:07.1)JP : D'accord,donc si les toupies se télescopent. Donc c'est arrivé une fois dans les parties que vous avez faites vendredi mais c'est possible. On est d'accord.(Pause)

CM6 – Extrait Séance 2 – Nombre de manches maximum

(0:51:08.1)JP : Maintenant le nombre de manches maximum. Ca c'est pas une question qui était posée. Donc quel va être le nombre de manches maximum ? Vous prenez un petit temps pour réfléchir. (Pause)Haley ?

¤ (0:52:13.3)Haley : Sept

¤ (0:52:13.7)JP : Pourquoi ?

¤ (0:52:15.4)Haley : Parce que tu peux faire que des plus un point.

¤ (0:52:22.2)JP : Donc ça c'est le nombre maximum, c'est a dire au bout de sept parties c'est forcé ... t'étais en train de dire on est forcé d'avoir fini au bout de sept parties. Le nombre maximum de parties c'est ça. (Dans la classe on entend des nons) Donc tu me dis que sept c'est quoi, c'est un nombre possible. On peut faire effectivement plus un plus un plus un plus un plus un ...

¤ (0:52:40.9)E18 : Mais on peut en faire plusieurs parce qu'on peut faire plus de sept.

¤ (0:52:47.4)JP : On peut faire plus de sept

¤ (0:52:47.9)E19 : Oui mais si les autres ils marquent.

¤ (0:52:48.6)JP : Hep hep hep. Qui j'ai pas encore interrogé aujourd'hui ? Thais ?

¤ (0:52:57.3)Thais : Bah on sait pas, parce que si ça trouve dans une partie, Valentin et Clément ils ont fait quatorze manches.

¤ (0:53:05.6) JP : Oui

¤ (0:53:06.0)Thais : Donc ça dépend en fait on peut faire comme on veut.

¤ (0:53:10.4)JP : On peut faire comme on veut. Mais alors tu répond pas précisément à la question. Quel est le nombre de manches maximum qu'on peut faire dans une partie. Nicolas.

¤ (0:53:26.3)Nicolas : Bah on n'a pas de nombre parce que si euh ... ton adversaire lance tout le temps, tout le temps, tout le temps à coté. Pesonne ne gagne jamais de points. Donc il peut y avoir infini.

¤ (0:53:39.0)E20 : Bah voila.

¤ (0:53:40.7)Gauthier : Mais y a un gagnant parce qu'il aura toujours moins de points.

¤ (0:53:44.6)Nicolas : Oui mais personne n'aura sept alors. Donc c'est pas encore fini alors.

¤ (0:53:48.9)E22 : C'est l'infini

¤ (0:53:49.0)JP : Parce que dans la règle, Gauthier, qu'est ce que tu peux rajouter a Gauthier Nicolas ?

¤ (0:53:53.1)Nicolas : Bah la partie est finie dès qu'un des joueurs a sept ou plus.

¤ (0:54:01.3)JP : Haley ?

¤ (0:54:01.7)Haley : Bah on peut avoir à l'infini oui, parce qu'on veut avoir des moins un, des moins trois

¤ (0:54:08.8)JP : Ce que nous a dit Nicolas est ce que ça convaint tout le monde ?

¤ (0:54:10.9)Classe: Oui

¤ (0:54:11.1)JP : ESt ce que c'est l'argument décisif et qui a été vécu par Valentin, de faire des moins un en série en fait y a pas de raison pour que ça s'arrete. Imaginons que y a la malchance ... la malédiction de la toupie soit sur Valentin il va toujours lancer la toupie hors du stadium pendant toute sa vie et puis voila, personne arrivera jamais a gagner la partie. Donc il sera obligé de jouer jusqu'à la fin des jours. Donc ... Pour l'instant on va s'arreter la.

Transcription Correction orale problèmes

Début de la mise en commun sur les problèmes

¤ (0:41:43.1)JP : Bon, on fait une petite mise en commun puisqu'on a encore du temps.

¤ (0:41:52.4) *(Discussion extérieures)*

¤ (0:42:18.7)JP : La première question, énoncé 1. Laura joue 2 manches aux toupies. A la seconde manche elle perd un point, quand elle compte ses points après la deuxième manche elle s'aperçoit qu'elle a gagné deux points en tout. Que s'est-il passé ? Donc la, on a la réponse de Valentin : elle a gagné + 3 au premier tour. Deuxième réponse de Mathis : A la première manche Laura a éjecté la toupie de son adversaire donc elle a trois points. Trois moins un égal deux points. Ca c'est Mathis. Et la dernière Mathilde : A la première manche Laura a fait sortir son adversaire du stadium donc elle a eu trois points. Qu'est ce que vous pensez de ces trois réponses ?

¤ (0:43:08.4)Nicolas : J'ai pas entendu en fait la question, c'était elle avait combien au début ?

¤ (0:43:12.4)E2 : La première.

¤ (0:43:13.2)JP: L'énoncé je vous le rappelle,Laura joue 2 manches aux toupies. A la seconde manche elle perd un point, quand elle compte ses points après la deuxième manche elle s'apperçoit qu'elle a gagné deux points en tout. Que s'est-il passé ? A la première manche. Thimothé ?

¤ (0:43:30.3)Thimothé : C'est toutes les mêmes réponses.

¤ (0:43:31.9)JP : Est ce que c'est toutes les mêmes réponses ?

¤ (0:43:33.6)Classe partagée, on entend "oui", "non"

¤ (0:43:36.1)Hugo : C'est juste qu'il s'est pas passé la même chose en fait. Enfin ...

¤ (0:43:41.1)JP : (Bruit interrogatif) Il s'est pas passé la même chose ? C'est à dire ?

¤ (0:43:47.2)Hugo : Ils ont pas expliqué pareil quoi.

¤ (0:43:49.5)JP : Ils ont pas expliqué pareil. C'est à dire ?

¤ (0:43:53.4)Hugo : Bah, euh ... par exemple Valentin il a mis elle a gagné plus trois points au premier tour. Enfin bref et il a pas expliqué ce qu'il a fait pour marquer trois points. Les trois réponses sont bonnes.

¤ (0:44:13.5)JP : Les trois réponses sont identiques, les trois réponses sont bonnes mais Valentin qu'est ce qu'il a fait par rapport aux ... donc y a trois types de réponses différentes. Trois types de justification différentes. Hugo a commencé à en parler. Margot ?

¤ (0:44:30.4)Margot : Bah ... Y en a une où c'est pas trop détaillé, Valentin par exemple il dit juste qu'elle a gagné trois points. Après Mathis il dit comment il a fait et après il a mis le calcul. Et Mathilde, elle a marqué pourquoi elle avait gagné trois points parce que elle a éjecté son adversaire du stadium.

¤ (0:44:54.5)JP : D'accord. Et alors vous en pensez quoi ? Ruth ?

¤ (0:44:58.6)Ruth : Je pense que celle de Mathis elle est plus détaillée.

¤ (0:45:03.6)JP : Plus détaillée ? Nino ?

¤ (0:45:06.4)Nino : Moi je pense que les trois se complètent en fait. Qui faudrait mettre les trois ensemble quoi. Parce que y la manière mathématique que Mathis a fait, y a la manière ... euh

¤ (0:45:20.2)E3 : littéraire

¤ (0:45:21.0)Nino : Oui je sais pas trop

¤ (0:45:23.2)JP : Littéraire ?

¤ (0:45:23.6)Nino : Ouais de Mathilde.

¤ (0:45:26.1)JP : Donc effectivement Mathilde, nous explique de manière plus littéraire. ET le ... qui est-ce qui explique de manière mathématique ?

¤ (0:45:34.5)Nino + Classe : Mathis.

¤ (0:45:37.2)JP : Inès ?

¤ (0:45:37.3)Inès : Bah Nino il a raison, parce que comme t'avais dit les trois réponses sont bonnes parce qu'on n'est pas obligé de dire l'action quand on a le nombre de point on sait ce qu'il se passe.

¤ (0:45:49.1)JP : Alors et Valentin qui est dans tout ça ? Donc ? On reviendra sur ce que tu as dit Inès mais Valentin dans tout ça ? `

¤ (0:45:58.9)E4 : Il explique pas pourquoi.

¤ (0:46:00.5)JP : Et alors ?

¤ (0:46:01.7)E4 : Bah on peut pas savoir comment il a eu plus trois.

¤ (0:46:07.0)JP : Inès, normalement tu n'es pas d'accord avec ce qu'elle vient de dire.

¤ (0:46:09.3)Inès : Bah non, parce que t'es pas obligé de dire pourquoi. Parce que tu peux gagner que comme ça les trois points.

¤ (0:46:18.4)JP : Puisqu'il y a qu'une manière de gagner trois points, Valentin il a compris que plus trois c'est pas la peine d'expliquer, c'est éjection du stadium parce que y a que cette manière de marquer trois points.

¤ (0:46:30.3)E4 : Bah aussi on peut faire trois plus un.

¤ (0:46:34.2)E5 : Deux plus un. Trois plus un c'est pas bon.

¤ (0:46:38.0)JP : Très bien si vous interragissez, il pourrait faire deux plus un, mais ? Nicolas ?

¤ (0:46:43.7)Nicolas : Elle a dit, y a marqué dans l'énoncé en une manche.

¤ (0:46:47.7)JP : Elle avait fait qu'une manche, donc ? Pas deux. Donc la on avait qu'une seule manière effectivement d'arriver à ça, c'est de faire un plus trois. Et Valentin plus trois, comme Valentin il aime pas trop écrire, c'est quand même pas son truc, plus trois, lui ça lui suffit.

¤ (0:47:10.4)E6 : Mais Jean Pierre, en fait on pourrait faire la manière de Mathis ou de Mathilde au début mais au final ...

¤ (0:47:17.8)JP : Attend, je comprend pas parce que ça parle dans tous les coins. Est-ce qu'on peut s'écouter ?

¤ (0:47:23.3)E6 : Bah in peut prendre la manière de Mathis ou Mathilde, peut importe, donc au final elle a gagné plus trois points au premier tour et après rajoute pour ...

¤ (0:47:33.3)JP : Alors pourquoi il faudrait mettre ça ?

¤ (0:47:35.3)E6 : Bah comme ça on sait bien comment ça s'est passé parce que si les personnes savent pas combien ça fait de points ...

¤ (0:47:41.5)JP : Donc y a une notation plus mathématique et une notation plus littéraire, plus littéraire on comprend peut être mieux, mais en mathématiques on va avoir tendence à vous demander une justification par le calcul. Quand dans les fiches de TP y en y a qui me racontent, j'ai additionné trois chiffres, j'ai fait ceci, c'est un peu inutile. Si vous me marquez j'ai additionné, je préfère voir l'addition, le calcul que vous avez fait.

¤ (0:48:10.1) E7 : Ou les deux.

¤ (0:48:12.9) JP : Mais ici, bon on n'est pas la pour dire que l'un est meilleur que l'autre mais y a une justification plus mathématique que je pense que tout le monde peut comprendre une fois que tout le monde connait la situation et y a celle de Mathilde où qui va permettre a des gens qui sont moins au courant de la situation de pouvoir mieux suivre. Donc si vous savez ... il faut être bilangue. Bilangue, ou bilingue. Y a la sixème bilangue on vous en parlera.

¤ (0:48:46.8)(Bavardages)

¤ (0:48:54.2)JP : Très bien, deuxième, je vous relis le ... alors. La deuxième c'était ... Laura joue aux toupies. Pendant le début de la partie elle gagne cinq points. En tout, alors en tout à la fin de la partie, elle gagne trois points. Que s'est-il passé pendant la fin de la partie ?

¤ (0:49:49.9)E8 : Bah elle a perdu deux points.

¤ (0:49:54.6)JP : Elle a perdu deux points.

¤ (0:49:56.0)E8 : Parce que elle a eu deux fois moins un point, parce qu'elle a lancé à coté du stadium.

¤ (0:50:06.4)JP : Alors ? Donc y a deux fois moins un. Oui. Vous avez regardé le tableau.(Pause) Nicolas ?

¤ (0:50:33.3)Nicolas: Déjà en fait, euh ... au début j'avais compris que c'était en une manche.

¤ (0:50:38.9)JP : Attend parle plus fort parce que y a un peu du bruit dans le couloir.

¤ (0:50:42.4)Nicolas : Bah au début, moi je pensais que ça allait être en une manche, que ca allait être fait ... puis que en tout on disait qu'elle perdait trois points. Puisque elle en avait cinq au début. Et ensuite elle en avait trois, elle perd deux points donc. Et puisque y a pas dans la règle moins deux points, y a que moins un ou moins trois ...

¤ (0:51:04.7)JP : Oui

¤ (0:51:05.4)Nicolas : Donc ensuite moi j'ai dit qu'il fallait faire en deux manches, deux fois en tirant à coté du stadium comme ça, ça fait moins deux.

¤ (0:51:14.4)JP : D'accord, ca c'était d'après toi mais regardez ce qu'il se passe au tableau. Le tableau celui la. Nicolas ?

¤ (0:51:36.0)Nicolas : Bah, oui Margot elle a fait euh ... elle a mis moins trois points et plus un après. Elle a fait ...

¤ (0:51:50.7)JP : Donc, Margot elle a inventé une partie où moins trois, pourquoi on perd moins trois déjà ?

¤ (0:51:58.5)E9 : Bah pour ...

¤ (0:51:59.9)E10 : Bah si on touche le stadium.

¤ (0:52:02.2)JP : L'un des joueurs, le joueur qui a touché et après il a gagné un point. Est ce que c'est possible ?

¤ (0:52:09.1)E11 : Bah oui c'est possible.

¤ (0:52:12.7)JP : Donc,qu'est ce que vous en déduisez la ?

¤ (0:52:15.5)E11 : Bah que sa réponse elle est bonne, celle de Valentin aussi et celle de Mathilde aussi.

¤ (0:52:19.9)JP : Donc déjà on peut valider que toutes les réponses sont bonnes. Euh ... (Pause) Donc y avait plusieurs solutions possibles. On est tous d'accord puisqu'ils ont tous juste. Dans un problème de ce type, est ce qu'il faut essayer ... Y a Haley tout a l'heure qui disait mais je n'ai pas trouvé toutes les solutions. Est ce qu'il est possible de trouver toutes les solutions ?

¤ (0:52:53.0)(Classe partagée)

¤ (0:52:56.8)JP : On justifie ?

¤ (0:52:59.1)E12 : Bah si on peut ...

¤ (0:53:00.5)E13 : Y en a infini

¤ (0:53:04.0)JP : La dans cette partie (la première), tout à l'heure on a vu que y avait que cette solution, on a vue la contrainte que en deux parties. Donc y avait pas vraiment de possiblités. La ? Y a pas ... on vous dit pas le nombre de manches qu'il y a eu.

¤ (0:53:21.6)E13 : Bah y en a à l'infini des parties

¤ (0:53:25.3)JP : Pourquoi y en a à l'infini ?

¤ (0:53:26.3)E13 : Parce qu'elle peut faire plusieur plus trois par exemple et plein de moins un.

¤ (0:53:33.4)JP : Oui on peut comme ça faire monter redescendre, monter redescendre à l'infini. Donc on pouvait voir que pour remporter une manche on pouvait avoir une infinité de parties, de manches ... Pour gagner une partie, on pourrait rester pendant des années et des années. Il suffisait qu'on fasse plusieurs moins un, plusieurs moins un ... en montant jamais le score. Mais la y avait plusieurs solutions possibles. Est-ce qu'il fallait en trouver un, plusieur, toutes ?

¤ (0:54:06.0)E14 : Une.

¤ (0:54:07.4)JP : Une, ça suffisait. Pour montrer qu'on pouvait trouver une explication. Euh ...Pour l'énoncé trois ... Laura a joué plusieurs manches. Marie est arrivée au cours de la partie voila ce qu'elle a vu. Laura a d'abord gagné quatre points, ensuite plusieurs manches se passées, quand Marie s'en va alors non ... pardon pour finir avec ça, on voit toujours les deux justifications uniquement avec le calcul et la avec les récits où on explique pourquoi elle gagne ou pourquoi elle perd des points. Donc sachant que celle la peut suffire. Je pense qu'au bout d'un moment, si on faisait cette activité un grand nombre de fois au bout d'un moment vous auriez plus besoin de marquer elle a perdu des points parce que. Ca vous semblerait tellement évident que vous auriez plus besoin de le mettre. (pause) Marianne est ce que tu veux qu'on fasse une mise en commun des deux derniers problèmes ?

Chapitre J

Analyse des phases orales - Liste des épisodes

Episodes CM1

- Sur le nombre maximum de manches
  Episode 1 : Analyse de parties réelles ;
  Episode 2 : Reccueil de conjectures ;
  Episode 3 : Etude conjecture fausse "on ne peut pas faire plus de treize manches" ;
  Episode 4 : Première conjecture "plus" (une justification) ;
  Episode 5 : Deuxième conjecture "l'infini" (deux justifications) ;
  Episode 6 : Construction d'une partie imaginaire infinie ;
- Sur le nombre minimum de manches
  Episode 7 : Modification d'une partie réelle ;
  Episode 8 : Conjecture justifiée par trois exemples imaginaires.

Episodes CM2

- Sur le nombre maximum de manches
  Episode 1 : Analyse de parties réelles ;
  Episode 2 : Proposition liée au format de la feuille ;
  Episode 3 : Conjecture justifiée par l'annulation de points ;
  Episode 4 : Reccueil de conjectures et conjecture justifiée par perte de points ;
  Episode 5 : Retour sur les parties réelles en contradiction avec les conjectures ;
  Episode 6 : Justification de la conjecture par construction d'une partie imaginaire ;

Episode 7 : Réflexion partie réelle partie imaginaire ;

- Sur le nombre minimum de manches

  Episode 8 : Première conjectures non justifiées ;

  Episode 9 : Conjecture justifiée par une partie imaginaire ;

  Episode 10 : Conjecture fausse rejeté immédiatement par un élève sans justification ;

  Episode 11 : Utilisation d'une partie imaginaire pour justifier une conjecture fausse ;

  Episode 12 : Construction plus mathématique ;

  Episode 13 : Retour réalité

  Episode 14 : Reconstruction complète avec un évènement à 4 points.

Episodes CM3

- Sur le nombre minimum de manches

  Episode 1 : Construction d'une partie imaginaire en trois manches pour justifier une conjecture ;

  Episode 2 : Justification mathématique ;

- Sur le nombre maximum de manches

  Episode 3 : Parties existantes ;

  Episode 4 : Reccueil de conjectures ;

  Episode 5 : Explication sur le lien entre le nombre de manches et la perte de points ;

  Episode 6 : Invention d'une partie imaginaire avec perte de points comme en 5 ;

  Episode 7 : Conjecture justifiée par l'argument proposé en 5 ;

  Episode 8 : Retour sur parties réelles en contradiction avec les conjectures ;

  Episode 9 : Conjecture prouvée par l'invention d'une partie imaginaire détaillée avec les évènements pour raccrochage au réel ;

  Episode 10 : Réflexion partie réelle et partie imaginaire.

Episodes CM4

- Sur le nombre minimum de manches

Episode 1 : Reccueil de conjectures justifiées par un élève ;

Episode 2 : Proposition d'un minimum trop grand (refusé) ;

Episode 3 : Premier argument contre un minimum égal à deux. Pas d'évènement à 3,5 ;

Episode 4 : Deuxième argument contre un minimum égal à deux, construction d'une partie en deux manches ;

– Sur le nombre maximum de manches

Episode 5 : Proposition de 20 manches ;

Episode 6 : Argument perte de points ;

Episode 7 : Suite de la perte de points mais limité à 12 manches par la taille de la feuille ;

Episode 8 : Pas de maximum ;

Episode 9 : Construction d'un argument sur parties réelles et parties imaginaire (partie imaginaire vue dans le nombre minimum de manches) ;

Episode 10 : Approfondissement des élèves mais l'enseignant ne suit pas ;

Episode 11 : Construction d'une partie infinie.

Episodes CM5

– Sur le nombre minimum de manches

Episode 1 : Construction d'une partie imaginaire ;

Episode 2 : Construction de parties équivalentes.

Episodes CM6

– Sur le nombre minimum de manches

Episode 1 : Reccueil de conjectures ;

Episode 2 : Reformulation de la question grâce aux parties réelles ;

Episode 3 : Argument contre une seule manche ;

Episode 4 : Construction d'une partie imaginaire pour justifier trois manches ;

Episode 5 : Explication sur le six points ;

Episode 6 : Travail sur la possibilité ;

– Sur le nombre maximum de manches

Episode 7 : Première conjecture justifiée par une partie imaginaire ;

Episode 8 : Argument contre la conjecture à grâce à une partie réelle ;

Episode 9 : Conjecture jutifiée par une partie imaginaire basée sur le réel ;

Episode 10 : Approfondissement réel/imaginaire.

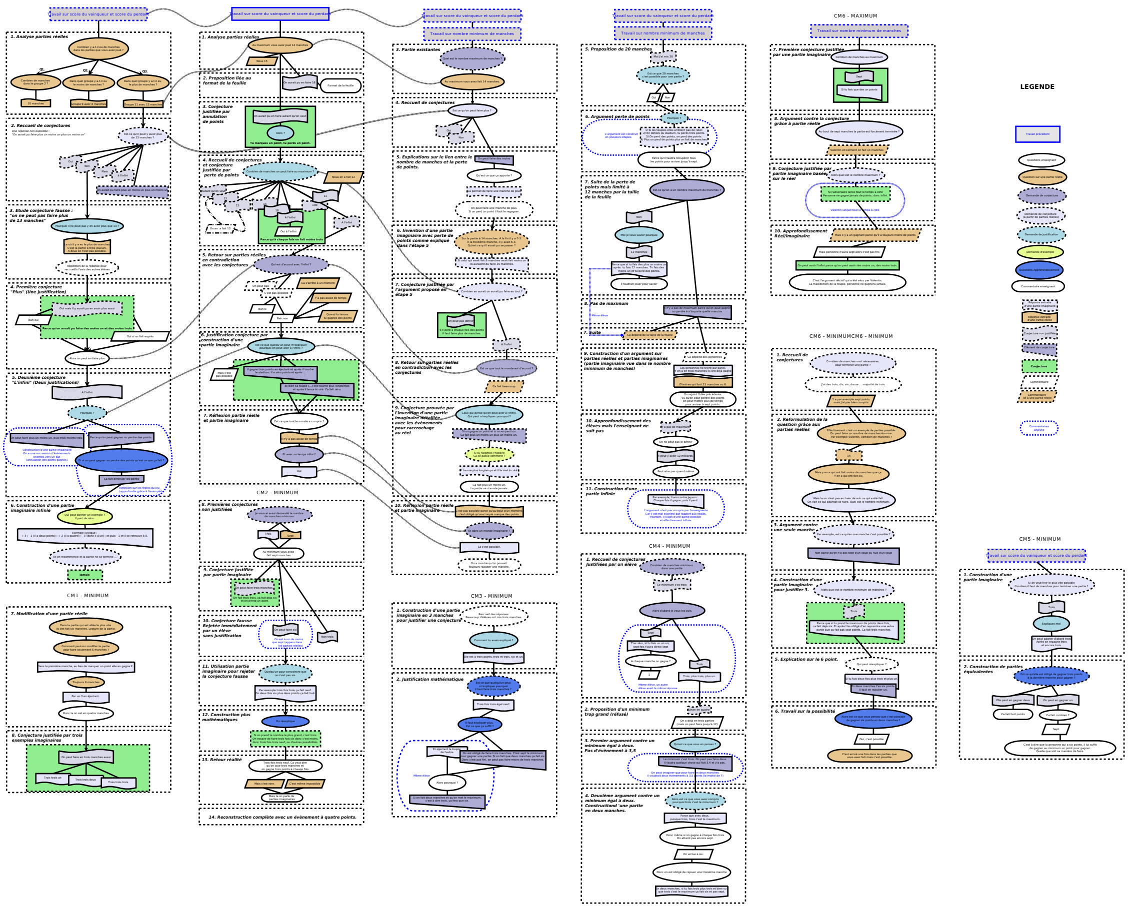


FIGURE J.1 – Image des épisodes